Première – Spécialité Mathématiques

Chap. 1 : Trinômes du second degré

2 Forme canonique : Variations, extremum et symétrie.

À la découverte de la forme canonique :

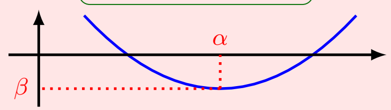
(à venir)

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de la forme canonique :

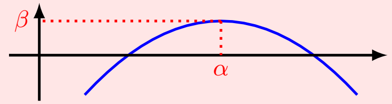
1) Sa représentation graphique :

Nous voulons des informations sur le sommet $(\alpha\,;\,\beta)$ de : $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Si a est positif



Si a est négatif



2) Son expression :

$\boxed{P(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec a, α, β des réels et $a \neq 0$

- *Le « a » est le même que celui de la forme développée.*
- *Le carré $(x - \alpha)^2$ s'annule bien en $x = \alpha$.*
- *Nous ajoutons bien verticalement β.*

3) Son tableau de variations et son extremum :

x		α	
Vars. de P	↘	β	↗

Un minimum égale à β atteint en $x = \alpha$

x		α	
Vars. de P	↗	β	↘

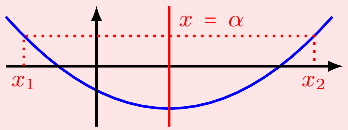
Un maximum égale à β atteint en $x = \alpha$

4) Les formules donnant α et β :

À apprendre par cœur : $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$ et $\boxed{\beta = P(\alpha)}$

Cette formule fait l'objet d'une démonstration du cours.

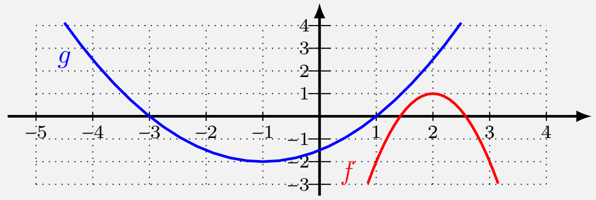
5) Son axe de symétrie :



Si $\boxed{P(x_1) = P(x_2)}$ alors $\boxed{\alpha = \text{moy}\,(x_1\,;\,x_2)}$

Savoir - faire : Obtenir la forme canonique (par le graphique)

Déterminer graphiquement les formes canoniques des fonctions f et g ci-contre.



Étape 1 : Lire les coordonnées du sommet $(\alpha\,;\,\beta)$.

$\boxed{f(x) = a\,(x - 2)^2 + 1}$

$(x - 2)$ s'annule en $x = 2$

$\boxed{g(x) = a\,(x + 1)^2 - 2}$

$(x + 1)$ s'annule en $x = -1$

Étape 2 : Tester l'expression avec un autre point.

$$\begin{aligned} & f(1) = -2 \\ \iff\ & a \times (-1)^2 + 1 = -2 \\ \iff\ & a + 1 = -2 \\ \iff\ & a = \boxed{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g(1) = 0 \\ \iff\ & a \times 2^2 - 2 = 0 \\ \iff\ & 4\,a = 2 \\ \iff\ & a = \boxed{0{,}5} \end{aligned}$$

Savoir - faire : Obtenir la forme canonique (par le calcul)

1) À partir d'une forme développée :

Soit f définie par : $f(x) = -2\,x^2 - 20\,x + 38$

Déterminer sa forme canonique : $\boxed{f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta}$

Correction :

$\boxed{a = -2}$ | $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-20}{2 \times (-2)} = \boxed{-5}$ | $\beta = -2(-5)^2 - 20(-5) + 38 = \boxed{88}$

2) En utilisant l'axe de symétrie de la parabole :

Soit f définie par : $\boxed{f(-2) = f(6) = 2}$ et $\boxed{f(2) = -2{,}8}$

Déterminer sa forme canonique.

Correction :

Comme : $f(-2) = f(6)$,

$\alpha = \text{moy}\,(-2\,;\,6) = \boxed{2}$

$\beta = f(2) = \boxed{-2{,}8}$

$$\begin{aligned} & f(6) = 2 \\ \iff\ & a \times 16 - 2{,}8 = 2 \\ \iff\ & a = \boxed{0{,}3} \end{aligned}$$

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » des techniques de preuve :

1) Erreur classique sur les inégalités :

L'inégalité change de sens lors que l'on multiplie/divise à g. et à d. par un négatif.

$2 \leqslant 4$ mais $-2 \geqslant -4$

2) Démontrer un maximum ou un minimum :

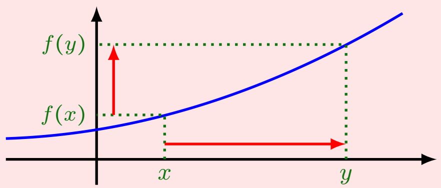
Soit $f(x) = a\,(x-2)^2 + 3$. avec a un réel non nul.

Démontrer que 3 est le max. de $f(x)$:	Démontrer que 3 est le min. de $f(x)$:
Objectif : Pour tout x, $f(x) \leqslant 3$	Objectif : Pour tout x, $f(x) \geqslant 3$

Début : Un carré est toujours positif. Pour tout x, $(x-2)^2 \geqslant 0$

3) Les inégalités avec une fonction (dé-) croissante :

f est croissante sur un intervalle I

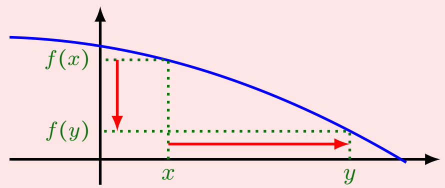


Pour tous les x, y de I,

Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$

f ne change pas le sens des inégalités.

f est décroissante sur un intervalle I



Pour tous les x, y de I,

Si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$

f change le sens des inégalités.

Les inégalités avec la fonction carrée :

La fonction carrée est ↗ sur $[0\,;+\infty[$	La fonction carrée est ↘ sur $]-\infty\,;0]$
Si $0 \leqslant x < y$ alors $x^2 < y^2$	Si $x < y \leqslant 0$ alors $x^2 > y^2$

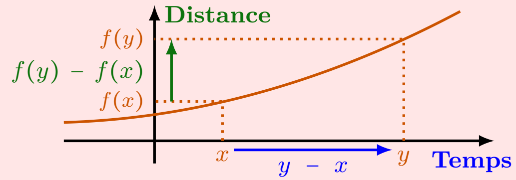
4) La vitesse moyenne avec une fonction (dé-) croissante :

si f est croissante sur un intervalle I,	si f est décroissante sur un intervalle I,
$V_{moy}([x\,;y])$ y est toujours positive.	$V_{moy}([x\,;y])$ y est toujours négative.

Formule donnant la vitesse moyenne sur un trajet $[x\,;y]$:

$$V_{moy}([x\,;y]) = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{Temps écoulé}}$$

$$V_{moy}([x\,;y]) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$



Cette vitesse représente l'augmentation de la fonction f quand l'entrée passe de x à y.
En mathématiques, on parle aussi de taux d'accroissement.

5) Identification : Polynômes égaux donc coefficients égaux :

Si deux polynômes sont égaux alors leurs coefficients sont égaux.

Par exemple, si pour tout réel x, on a :

$$(b-a)\,x^2 + (a+b)\,x + (c-2a) = -4x^2 + 2x - 2$$

Alors par identification des coefficients, nous obtenons que :

$b - a = -4$; $a + b = 2$ et $c - 2a = -2$

Et en résolvant ce système de 3 équations à 3 inconnues, nous obtenons :

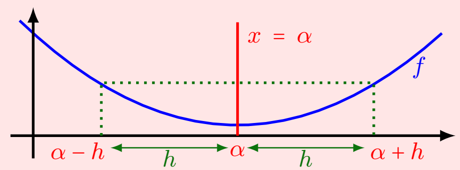
$a = 3$; $b = -1$ et $c = 4$

6) Démontrer un axe de symétrie vertical :

Pour tout réel h,

Début : Calculer $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$.

Objectif : Obtenir la même expression.



Démontrer que β est un extremum.

Soit $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$.

Démontrer, par le calcul, que β est un minimum ou un maximum de f.

Correction :

Si $a > 0$, alors β est un minimum.	Si $a < 0$, alors β est un maximum.
Pour tt x, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$	Pour tt x, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$
$\iff a \times (x-\alpha)^2 \geqslant a \times 0$	$\iff a \times (x-\alpha)^2 \leqslant a \times 0$
$\iff a\,(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant 0 + \beta$	$\iff a\,(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant 0 + \beta$
$\iff f(x) \geqslant \beta$	$\iff f(x) \leqslant \beta$

Démontrer les variations d'une parabole (par les inégalités) :

Soit $f(x) = a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta$. **Démontrons que :**

Si $a > 0$:	f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\alpha\right]$	f est croissante sur $\left[\alpha\,;+\infty\right[$
Si $a < 0$:	f est croissante sur $\left]-\infty\,;\alpha\right]$	f est décroissante sur $\left[\alpha\,;+\infty\right[$

Soient $x < y$ **, éléments de** $\left]-\infty\,;\alpha\right]$.
$f(x) < f(y)$ **?** **ou** $f(x) > f(y)$ **?**

Soient $x < y$ **, éléments de** $\left[\alpha\,;+\infty\right[$.
$f(x) < f(y)$ **?** **ou** $f(x) > f(y)$ **?**

Correction :

$$\begin{array}{lccccc} & x & < & y & \leqslant & \alpha \\ \Rightarrow & x-\alpha & < & y-\alpha & \leqslant & 0 \\ \Rightarrow & \left(x-\alpha\right)^2 & > & \left(y-\alpha\right)^2 & & ⚠ \end{array}$$

car la fonction carrée est ↘ sur $\left]-\infty\,;0\right]$

$$\begin{array}{lccccc} & \alpha & \leqslant & x & < & y \\ \Rightarrow & 0 & \leqslant & x-\alpha & < & y-\alpha \\ \Rightarrow & & & \left(x-\alpha\right)^2 & < & \left(y-\alpha\right)^2 \end{array}$$

car la fonction carrée est ↗ sur $\left[\alpha\,;+\infty\right[$

Si on multiplie par a positif, l'inégalité ne change pas de sens :

$$\begin{array}{lccc} \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2 & > & a\left(y-\alpha\right)^2 \\ \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2+\beta & > & a\left(y-\alpha\right)^2+\beta \\ \Rightarrow & f(x) & > & f(y) \end{array}$$

donc f **est décroissante sur** $\left]-\infty\,;\alpha\right]$

$$\begin{array}{lccc} \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2 & < & a\left(y-\alpha\right)^2 \\ \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2+\beta & < & a\left(y-\alpha\right)^2+\beta \\ \Rightarrow & f(x) & < & f(y) \end{array}$$

donc f **est croissante sur** $\left[\alpha\,;+\infty\right[$

Si on multiplie par a négatif, l'inégalité change de sens :

$$\begin{array}{lccc} \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2 & < & a\left(y-\alpha\right)^2 \\ \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2+\beta & < & a\left(y-\alpha\right)^2+\beta \\ \Rightarrow & f(x) & < & f(y) \end{array}$$

donc f **est croissante sur** $\left]-\infty\,;\alpha\right]$

$$\begin{array}{lccc} \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2 & > & a\left(y-\alpha\right)^2 \\ \Rightarrow & a\left(x-\alpha\right)^2+\beta & > & a\left(y-\alpha\right)^2+\beta \\ \Rightarrow & f(x) & > & f(y) \end{array}$$

donc f **est décroissante sur** $\left[\alpha\,;+\infty\right[$

Démontrer les variations d'une parabole (par la vitesse moyenne) :

Soit $f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$. **Pour tous réels** x **et** y **vérifiant** $x \neq y$,

Calculer la vitesse moyenne sur le trajet $\left[x\,;y\right]$ **:** $V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Correction :

Pour tous réels x **et** y **vérifiant** $x \neq y$,

$$\begin{aligned} V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \frac{\left[a\left(y-\alpha\right)^2+\beta\right]-\left[a\left(x-\alpha\right)^2+\beta\right]}{y-x} \\ &= \frac{a\left(y-\alpha\right)^2+\cancel{\beta}-a\left(x-\alpha\right)^2-\cancel{\beta}}{y-x} \\ &= \frac{a\left[\left(y-\alpha\right)^2-\left(x-\alpha\right)^2\right]}{y-x} \\ &= \frac{a\left[\left(\left(y-\alpha\right)+\left(x-\alpha\right)\right)\left(\left(y-\alpha\right)-\left(x-\alpha\right)\right)\right]}{y-x} \\ &= \frac{a\left(x+y-2\alpha\right)\cancel{\left(y-x\right)}}{\cancel{y-x}} \\ V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) &= \boxed{a\left(x+y-2\alpha\right)} \end{aligned}$$

Cette vitesse moyenne est - elle positive ou négative ?

	Soit x et y éléments de $\left]-\infty\,;\alpha\right]$ $\left(x+y-2\alpha\right)$ est négatif	Soit x et y éléments de $\left[\alpha\,;+\infty\right[$ $\left(x+y-2\alpha\right)$ est positif
Si $a > 0$:	$V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) = a\left(x+y-2\alpha\right)$ est négative **donc** f est y est ↘.	$V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) = a\left(x+y-2\alpha\right)$ est positive **donc** f est y est ↗.
Si $a < 0$:	$V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) = a\left(x+y-2\alpha\right)$ est positive **donc** f est y est ↗.	$V_{moy}\left(\left[x\,;y\right]\right) = a\left(x+y-2\alpha\right)$ est négative **donc** f est y est ↘.

Démontrer la formule donnant α en fonction de a et b.

$$f(x) = \underbrace{a\,x^2 + b\,x + c}_{\text{forme développée}} = \underbrace{a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta}_{\text{forme canonique}}$$

À partir de cette égalité de polynômes, déterminer α en fonction de a et b.

Correction :

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta \\ &= a\left(x^2 - 2\,\alpha\,x + \alpha^2\right) + \beta \\ \boxed{a\,x^2 + b\,x + c} &= \boxed{a\,x^2 - 2\,a\,\alpha\,x + a\,\alpha^2 + \beta} \end{aligned}$$

Quand deux polynômes sont égaux, leurs coefficients sont égaux :

Identifions les coefficients en x : $-2\,a\,\alpha = b$ **Isolons le α**

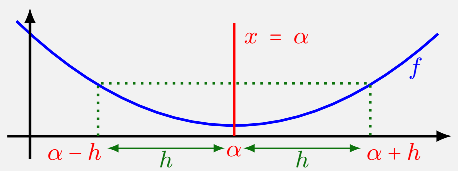
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-2\,a\,\alpha}{-2\,a} = \frac{b}{-2\,a}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha = \boxed{-\frac{b}{2a}}$$

Démontrer que $x = \alpha$ est un axe de symétrie.

$$\boxed{f(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta}$$

Démontrer, par le calcul, que la parabole représentant f admet un axe de symétrie vertical d'équation : $x = \alpha$.



Correction :

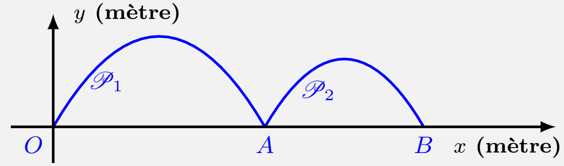
Pour tout h, $f(\alpha - h)$	**Pour tout h,** $f(\alpha + h)$
$= a\left((\alpha-h)-\alpha\right)^2 + \beta$	$= a\left((\alpha+h)-\alpha\right)^2 + \beta$
$= a\left(-h\right)^2 + \beta$	$= a\left(h\right)^2 + \beta$
$= \boxed{a\,h^2 + \beta}$	$= \boxed{a\,h^2 + \beta}$

Exercice de synthèse sur les formes factorisée et canonique :

(# Roland Garros) **Une balle de tennis rebondit sur le sol en suivant des trajectoires paraboliques et en perdant de la hauteur à chaque rebond.**

La parabole $\mathscr{P}_1$ a pour équation :

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x^2 + 2\,x}$$



Question 1 :

Le premier choc sur le sol a lieu au point A. **Calculer l'abscisse x_A de A.**

Indication :

L'abscisse x_A de A est une racine de $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2\,x$ puisque $P(x)$ s'annule.

Or, qui dit racine, dit forme factorisée, dit factorisation de $P(x)$.

Correction :

- **Pour tout réel x,** $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2\,x = x\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$
- **De plus :** $P(x) = 0 \iff \boxed{x = 0}$ **ou** $\left(-\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 4}\right)$

L'abscisse x_A de A est donc égale à 4.

Question 2 :

La hauteur maximale atteinte lors du rebond suivant est $1{,}5$ m et l'abscisse du point B correspondant au choc suivant sur le sol vaut 7.

Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}_2$.

Indication :

Nous avons des informations sur le sommet donc déterminons la forme canonique.

Correction :

Posons : $\mathscr{P}_2 : \quad y = Q(x) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$ **Cherchons a, α et β**

$$\boxed{\beta = 1{,}5}$$

$$\alpha = \text{moy}\,(4\,;7) = \boxed{5{,}5}$$

$$\begin{aligned} a\left(7 - 5{,}5\right)^2 + 1{,}5 &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad a \times 1{,}5^2 &= -1{,}5 \\ \Longleftrightarrow \quad a = -1/1{,}5 &= \boxed{-2/3} \end{aligned}$$