Première – Spécialité Mathématiques

Chap. 1 : Trinômes du second degré

3 Comment passer d'une forme à une autre ?

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de « développée » à « canonique » :

Quel est l'objectif de la transformation ?

À partir de la forme développée d'un trinôme : $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Il est toujours possible d'obtenir la forme canonique :

$P(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$ (version 1) ou $P(x) = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta'\right]$ (version 2)

- *La « version 1 » est celle que nous avons utilisé dans la partie précédente.*
- *La « version 2 » aura ma préférence quand il s'agira de trouver la forme factorisée.*

Étape 1 de la transformation :

Factoriser par a.

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$
$$= a\,x^2 + a \times \frac{b}{a}\,x + c$$
$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c$$

ou

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$
$$= a\,x^2 + a \times \frac{b}{a}\,x + a \times \frac{c}{a}$$
$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right)$$

Étape 2 de la transformation :

Rassembler le x^2 et le terme en x sous la forme d'un seul carré à l'aide de :

La formule de complétion du carré : $x^2 + 2\,d\,x = (x+d)^2 - d^2$

Technique de calcul : **Le $+1 - 1$ et le $\times 2 \div 2$.**

Dans une expression, nous avons la liberté de faire apparaître ce que nous voulons :

un $+1$ ou un $\times 2$ **à condition de compenser par** un -1 ou un $\div 2$

Pour réussir à factoriser par 3 :

$$= 3\,x^2 + 5\,x$$
$$= 3\,x^2 + 3 \times \frac{5}{3}\,x$$
$$= 3\left(x^2 + \frac{5}{3}\,x\right)$$

Pour obtenir le carré $(x+3)^2$:

$$= x^2 + 6\,x + 5$$
$$= \underbrace{x^2 + 6\,x + 9} - 9 + 5$$
$$= (x+3)^2 - 4$$

Savoir - faire : De la forme développée à la forme canonique.

Déterminer les formes canoniques des deux trinômes suivants :

$f(x) = 2\,x^2 + 12x - 32$ | $g(x) = -3\,x^2 + 4x - 7$

Correction avec la version 1 :

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \longrightarrow f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$

Étape 1 : On factorise par a.

$$f(x) = 2 \times x^2 + 2 \times 6x - 32$$
$$f(x) = 2 \times (x^2 + 6x) - 32$$

$$g(x) = -3\,x^2 + -3 \times \frac{4}{-3}\,x - 7$$
$$g(x) = -3 \times \left(x^2 - \frac{4}{3}\,x\right) - 7$$

Étape 2 : On applique la formule de la complétion du carré.

Rappel de la formule : $x^2 + 2\,d\,x = (x+d)^2 - d^2$

$$f(x) = 2\,(\underbrace{x^2 + 2 \times 3\,x}) - 32$$
$$= 2\left[(x+3)^2 - 3^2\right] - 32$$
$$= 2\,(x+3)^2 + 2 \times (-9) - 32$$
$$f(x) = 2\,(x+3)^2 - 50$$

$$g(x) = -3\left(x^2 - 2 \times \frac{2}{3}\,x\right) - 7$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] - 7$$
$$g(x) = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{17}{3}$$

Correction avec la version 2 :

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \longrightarrow f(x) = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta'\right]$

Étape 1 : On factorise par a.

$$f(x) = 2 \times x^2 + 2 \times 6x - 2 \times 16$$
$$f(x) = 2 \times (x^2 + 6x - 16)$$

$$g(x) = -3\,x^2 + -3 \times \frac{4}{-3}\,x + (-3) \times \frac{7}{3}$$
$$g(x) = -3 \times \left(x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{7}{3}\right)$$

Étape 2 : On applique la formule de la complétion du carré.

Rappel de la formule : $x^2 + 2\,d\,x = (x+d)^2 - d^2$

$$f(x) = 2\left[\underbrace{x^2 + 2 \times 3\,x} - 16\right]$$
$$= 2\left[(x+3)^2 - 3^2 - 16\right]$$
$$= 2\left[(x+3)^2 - 9 - 16\right]$$
$$f(x) = 2\left[(x+3)^2 - 25\right]$$

$$g(x) = -3\left[x^2 - 2 \times \frac{2}{3}\,x + \frac{7}{3}\right]$$
$$= -3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}\right]$$
$$g(x) = -3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{17}{9}\right]$$

Vidéos : Déterminer la forme canonique d'un trinôme :

Exemple 1 : Déterminer la forme canonique de : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=OQHf-hX9JhM (Yvan-Monka)

Exemple 2 : Mettre sous forme canonique : $f(x) = 3x^2 - 24x + 10$

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=SgHeMMFXk1g (HedAcademy)

Exemple 3 : Déterminer la forme canonique de chaque trinôme.

a. $x^2 - 6x + 2$

b. $4x^2 - 3$

c. $3x^2 - 12x + 21$

d. $-x^2 + 4x - 3$

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=M8DIZyBMBRI (Yvan-Monka)

Démontrer la forme canonique dans le cas général :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow f(x) = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta'\right]$$

Étape 1 : On factorise par a.

$$f(x) = a\,x^2 + a \times \frac{b}{a}x + a \times \frac{c}{a}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Étape 2 : On applique la formule de la complétion du carré.

Rappel de la formule : $x^2 + 2\,d\,x = (x + d)^2 - d^2$

$$f(x) = a\left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \times \frac{(-4a)}{(-4a)}\right]$$

$$f(x) = \boxed{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$$

Savoir - faire : Factoriser pour résoudre une (in-) équation.

Résoudre les (in-) équations du 2^{nd} degré suivantes en factorisant.

a. $-3x^2 + 6x \geqslant 0$

b. $-4x^2 - 12 = 0$

c. $4(x-2)^2 - 100 > 0$

d. $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$

Si cela est posible, on factorise par un facteur commun :

a.

$$-3x^2 + 6x \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \times (-x) + 3x \times 2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \times (-x + 2) \geqslant 0$$

Les deux racines sont 0 et 2.

$a = -3$ donc positif entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} = [\,0\,;\,2\,]}$$

b.

$$-4x^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\,x^2 + (-4) \times 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\,(x^2 + 3) = 0$$

Or $x^2 + 3 > 0$ donc ne s'annule pas.

L'équation n'a donc pas de solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$$

Si cela est posible, on factorise par une identité remarquable :

c.

$$4(x-2)^2 - 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \big(2(x-2)\big)^2 - 10^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \big(2(x-2) - 10\big)\big(2(x-2) + 10\big) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 14)(2x + 6) > 0$$

Les deux racines sont 7 et -3.

$a = 4$ donc négatif entre les racines.

$$\boxed{\mathcal{S} = \,]-\infty\,;\,-3\,[\ \cup\ ]\,7\,;\,+\infty\,[}$$

d.

$$4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - 2(2x)(3) + 3^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\,1,5\,\}}$$