Première – Spécialité Mathématiques

Chap. 1 : Trinômes du second degré

4 Méthodes pour résoudre les (in -) équations du 2^{nd} degré :

Le concept permettant de résoudre les (in -) équations de degré $\geqslant 2$:

Si je vous demande de résoudre l'inéquation suivante :

$$-18x^3 - 66x^2 + 114x - 30 > 0$$

Vous risquez de ne pas être totalement emballés.

Si maintenant, je factorise l'expression, alors :

Vous devriez retrouver le sourire.

$$2\,(2x-3)\,(5+x)\,(1-3x) > 0$$

Puisqu'il suffit de faire un joli tableau de signes.

Correction :

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{3}$		$1,5$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$5+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-5\right[\cup \left]\frac{1}{3}\,;1,5\right[$$

Conclusion :

Le concept pour résoudre les degrés $\geqslant 2$: **Factoriser**

Écrire notre expression sous la forme d'un produit (multiplication de facteurs).

- **Le signe d'un produit ? Facile.** Il suffit de compter le nombre de négatifs.
- **Quand un produit s'annule ? Facile.** L'un de ses facteurs doit s'annuler.

Apprenons à aimer cette belle opération qu'est la multiplication.

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » des méthodes sans le discriminant Δ :

Le concept pour résoudre les (in -) équations de degré $\geqslant 2$:

Factoriser : Écrire notre expression sous la forme d'un produit ($\times$ de facteurs).

- **Le signe d'un produit ?** **Facile** Il suffit de compter le nombre de négatifs.
- **Quand un produit s'annule ?** **Facile** L'un de ses facteurs doit s'annuler.

Méthode 1 :

Détecter une racine évidente x_1 : $0,\ 1,\ 2,\ -1$ **ou** -2.

Et on factorise ensuite par $(x - x_1)$ *Voir le savoir - faire de la partie 1.*

Si cette méthode 1 ne fonctionne pas, alors on passe à la méthode 2.

Méthode 2 :

Factoriser par : $\begin{cases} \text{un facteur commun ou} \\ \text{une identité remarquable.} \end{cases}$ *Voir le savoir - faire de la partie 3.*

Si les méthodes 1 et 2 ne fonctionnent pas, alors on passe à la méthode 3.

Méthode 3 :

Si l'expression est de la forme : $x^2 + bx + c$ *Voir le savoir - faire de la partie 5.*

Nous cherchons deux nombres dont la somme fait $-b$ et le produit fait c.

Si les méthodes 1, 2 ou 3 ne fonctionnent pas, alors on passe à la méthode 4.

Méthode 4 : L'artillerie lourde.

Si toutes les méthodes précédentes n'ont pas fonctionné, nous avons :

La solution calculatoire par excellence mais qui va toujours fonctionner :

La méthode du discriminant qui se note Δ et se lit « Delta ».

Nous reviendrons en détails, dans cette partie 4, sur cette nouvelle méthode.

Néanmoins, j'attire votre attention sur le fait que les élèves ont trop souvent tendance à ne retenir que la méthode du discriminant Δ pour résoudre une (in-) équation du 2^{nd} degré. Les élèves aiment la nouveauté. Je vous remercie donc par avance de ne pas oublier les méthodes 1, 2 et 3 qui sont bien plus rapides mais qui ont le défaut de ne pas toujours fonctionner.

Savoir - faire : Résoudre une (in-) équation du 2^{nd} degré sans le Δ :

Méthode 1 : Factoriser à l'aide d'une racine évidente.

Résoudre les inéquations suivantes :

$-3x^2 + 9x + 12 \geqslant 0$ | $2x^2 + x - 10 > 0$

Correction :

Après quelques tests, nous trouvons une racine évidente :

$-3 \times (-1)^2 + 9(-1) + 12 = 0$ | $2 \times 2^2 + 2 - 10 = 0$

Si x_1 est une racine alors nous pouvons factoriser par $(x - x_1)$:

$$-3x^2 + 9x + 12 \geqslant 0 \iff (x+1)(-3x+12) \geqslant 0$$

$$2x^2 + x - 10 > 0 \iff (x-2)(2x+5) > 0$$

Terminons avec l'étude du signe de a :

$\boxed{a = -3}$ **est négatif donc**
Positif entre les racines -1 et 4
$\boxed{S = [-1\,;4]}$

$\boxed{a = 2}$ **est positif donc**
Positif en dehors des racines $-2{,}5$ et 2
$\boxed{S =]-\infty\,;-2{,}5[\ \cup\ ]2\,;+\infty[}$

Méthode 2 : Factoriser par un facteur commun et/ou par une I.R.).

Résoudre les inéquations suivantes :

$4x^2 + 12x \leqslant 0$ | $3(x-1)^2 - 75 > 0$

Correction :

Factorisons le plus possible :

$$4x^2 + 12x \leqslant 0 \iff 4x \times x + 4x \times 3 \leqslant 0 \iff 4x \times (x+3) \leqslant 0$$

$$3(x-1)^2 - 75 > 0 \iff 3\left[(x-1)^2 - 5^2\right] > 0 \iff 3(x-6)(x+4) > 0$$

Terminons avec l'étude du signe de a :

$\boxed{a = 4}$ **est positif donc**
Négatif entre les racines -3 et 0
$\boxed{S = [-3\,;0]}$

$\boxed{a = 3}$ **est positif donc**
Positif en dehors des racines -4 et 6
$\boxed{S =]-\infty\,;-4[\ \cup\ ]6\,;+\infty[}$

Méthode 3 : Somme et produit des racines (quand $a = 1$)

Résoudre les inéquations suivantes :

$x^2 - 8x + 12 \geqslant 0$ | $-2x^2 + 10x + 48 > 0$

Correction :

Factorisons pour avoir : $x^2 - sx + p$ *Voir le savoir - faire de la partie 5.*

C'est parfait.

$\boxed{\text{somme} = 8}$ et $\boxed{\text{produit} = 12}$

$$-2x^2 + 10x + 48 > 0 \iff -2(x^2 - 5x - 24) > 0$$

$\boxed{\text{somme} = 5}$ et $\boxed{\text{produit} = -24}$

Testons tous les produits possibles :

$\boxed{12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4}$
$\boxed{x_1 = 2}$ et $\boxed{x_2 = 6}$

$\boxed{24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6}$
$\boxed{x_1 = -3}$ et $\boxed{x_2 = 8}$

Terminons avec l'étude du signe de a :

$\boxed{a = 1}$ **est positif donc**
Positif en dehors des racines 2 et 6
$\boxed{S =]-\infty\,;2]\ \cup\ [6\,;+\infty[}$

$\boxed{a = -2}$ **est négatif donc**
Positif entre les racines -3 et 8
$\boxed{S =]-3\,;8[}$

Démontrons la formule du discriminant Δ :

Dans la partie 3 de ce cours, nous avions déjà fait une partie du chemin :

- **Nous étions parties de la forme développée de notre trinôme du 2^{nd} degré.**
- **Et nous en sommes arrivés à cette « belle » expression qu'est la forme canonique.**

$$f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{La forme développée}} = \underbrace{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}_{\text{La forme canonique}}$$

Notre objectif est d'essayer d'obtenir la forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2)$

En effet, nous avons vu dans le savoir - faire précédent que factoriser est le concept novateur à utiliser afin de pouvoir résoudre des (in -) équations de degré 2 (voir 3, 4 ou plus).

Pour cela, essayons d'appliquer une identité remarquable :

Or pour pouvoir appliquer l'I.R. : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

- **Il faut pouvoir écrire** $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ **comme un carré** (le B^2).
- **Cela est possible si** $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ **est positif** **car un carré est tjrs positif.**
- **C'est - à - dire quand** $\boxed{b^2 - 4ac \text{ est positif}}$ **car $4a^2$ est tjrs positif.**

Définition du discriminant Δ :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$ et il se lit « Delta »

Trois situations à étudier :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Situation n°1 : $\Delta = 0$.

Nous avons déjà notre forme factorisée.

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Situation n°2 : $\Delta < 0$.

Pas de forme factorisée car ne s'annule pas.

$$f(x) = a\underbrace{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{Toujours positif}}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Situation n°3 : $\Delta > 0$.

Nous pouvons appliquer notre I.R. : $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{or ici } \Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$$

$$= a\left[\left(\boxed{x + \frac{b}{2a}}\right)^2 - \left(\boxed{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right)^2\right]$$

$$= a\left(\boxed{x + \frac{b}{2a}} + \boxed{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right)\left(\boxed{x + \frac{b}{2a}} - \boxed{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = \boxed{a(x - x_1)(x - x_2)} \quad \text{Forme factorisée}$$

avec $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Notre tableau de signes habituel :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de la méthode du discriminant Δ :

Situation initiale :

Avoir une trinôme du second degré sous sa forme développée :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Formule du discriminant Δ :

Calculer : $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Mémo : « Le juge Bertrand avec sa tête au carré, moins ses quatre assesseurs »

Forme factorisée, racines, tableau de signes :

Si $\Delta > 0$

On peut calculer $\sqrt{\Delta}$

Forme factorisée :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

avec les racines simples

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Si $\Delta = 0$

$\sqrt{\Delta} = 0$

Forme factorisée :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$$

avec la racine double

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta < 0$

$\sqrt{\Delta}$ n'existe pas.

Forme factorisée :

Pas de forme factorisée

Pas de racine

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	Signe de a	

Savoir - faire : Simplifier l'expression des éventuelles racines.

Le calcul du discriminant Δ associé à un trinôme donné ainsi que le calcul de ses éventuelles racines demandent un minimum de techniques de calcul :

Au niveau des racines carrés et au niveau des fractions.

Je préfère donc prendre le temps de vous expliciter ces techniques afin que vous les maîtrisiez.

Deux exemples où l'une des lettres b ou c manque :

Déterminer les éventuelles solutions des équations ci-dessous :

$$5x^2 + 3x = 0 \qquad\qquad 2x^2 - 54 = 0$$

Calculons le discriminant Δ :

$a = 5$; $b = 3$ et $c = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4\,(5)\,(0)$$
$$\Delta = \boxed{9}$$

$a = 2$; $b = 0$ et $c = -54$

$$\Delta = 0^2 - 4\,(2)\,(-54)$$
$$\Delta = \boxed{432}$$

Calculons les éventuelles solutions :

Dans les deux cas, nous avons deux solutions x_1 et x_2 à calculer :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9}}{2 \times 5} = \frac{-3 + 3}{10} \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9}}{2 \times 5} = \frac{-6}{10}$$
$$x_1 = \boxed{0} \qquad x_2 = \boxed{-0,6}$$

Remarquons que l'on aurait pu éviter tous ces calculs en factorisant par x.

$$5\,x^2 + 3\,x = x\,(\,5\,x + 3\,)$$

$$x_1 = \frac{-0 + \sqrt{432}}{2 \times 2} \qquad x_2 = \frac{-0 - \sqrt{432}}{2 \times 2}$$
$$x_1 = \boxed{\frac{\sqrt{432}}{4}} \qquad x_2 = \boxed{-\frac{\sqrt{432}}{4}}$$

Remarquons que l'on aurait pu appliquer l'identité remarquable $A^2 - B^2$.

$$2\,x^2 - 54 = 2\,\left(x^2 - (\sqrt{27})^2\right)$$

- **Je vous rappelle que le Δ n'est pas la seule méthode pour trouver les racines.**
- **Il va falloir trouver des techniques de calcul pour rendre plus sexy nos réponses.**

Technique 1 : Simplifier la racine carrée de Δ.

Reprenons notre Δ égale à 432 et essayons de simplifier sa racine carrée :

$$\sqrt{432} = \sqrt{16 \times 9 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 4 \times 3 \times \sqrt{3} = \boxed{12\,\sqrt{3}}$$

Écrire le discriminant Δ comme un produit avec le maximum de carrés parfaits afin de pouvoir utiliser les deux propriétés ci-dessous :

$$\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \quad \textbf{et} \quad \sqrt{A^2} = A \quad \textbf{pour tout } A \textbf{ et } B \textbf{ positifs}$$

Technique 2 : Simplifier les fractions pour rendre sexy nos racines.

Simplifier les fractions suivantes :

$$F = \frac{-3 + 12\,\sqrt{5}}{3} \qquad G = \frac{-2 + 15\,\sqrt{3}}{10}$$

Correction :

L'idée est de décomposer notre fraction en deux parties pour les simplifier :

$$F = \frac{-3 + 12\,\sqrt{5}}{3} = -\frac{3}{3} + \frac{12\,\sqrt{5}}{3}$$
$$F = \boxed{-1 + 4\sqrt{5}}$$

$$G = \frac{-2 + 15\,\sqrt{3}}{10} = \frac{-2}{10} + \frac{15\,\sqrt{3}}{10}$$
$$G = \boxed{-0,2 + 1,5\,\sqrt{3}}$$

Savoir - faire : Résoudre une (in-) équation du 2^{nd} degré avec le Δ.

Résoudre les deux (in-) équations suivantes :

$$-4\,x^2 + 20\,x - 25 = 0 \qquad 2\,x^2 - 5\,x + 4 \leqslant 0$$

Correction :

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = 20^2 - 4\,(-4)\,(-25) = 400 - 16 \times 25$$
$$\Delta = \boxed{0}$$

$$\Delta = 5^2 - 4\,(2)\,(4) = 25 - 32$$
$$\Delta = \boxed{-7}$$

On calcule les éventuelles racines :

Une seule racine car $\Delta = 0$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \times (-4)} = \boxed{2,5}$$

Pas de racine car $\Delta < 0$:

On regarde le signe de a pour conclure :

Nous avons ici une équation donc cette étape est inutile.

$$S = \{\,2,5\,\}$$

$a = 2$ **est positif donc Toujours strictement positif**

$$S = \varnothing$$

Résoudre les deux (in-) équations suivantes :

$4\,x^2 + 4\,x - 19 > 0$ | $-6\,x^2 - 12\,x + 4,5 \geqslant 0$

Correction :

On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= 4^2 - 4\,(4)\,(-19)\\ &= 16 \times \left(1 + 19\right)\\ &= 16 \times 4 \times 5\\ &= 4^2 \times 2^2 \times \sqrt{5}^2\\ \Delta &= \boxed{\left(8\sqrt{5}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 12^2 - 4\,(-6)\,(4,5)\\ &= 252\\ &= 4 \times 9 \times 7\\ &= 2^2 \times 3^2 \times \sqrt{7}^2\\ \Delta &= \boxed{\left(6\sqrt{7}\right)^2}\end{aligned}$$

On calcule les éventuelles racines x_1 ou x_2 :

$$x_1 = \frac{-4 + 8\sqrt{5}}{2 \times 4} = -\frac{4}{8} + \frac{8\sqrt{5}}{8} \qquad x_1 = \boxed{-0,5 + \sqrt{5}}$$

$$x_2 = \frac{-4 - 8\sqrt{5}}{2 \times 4} = -\frac{4}{8} - \frac{8\sqrt{5}}{8} \qquad x_2 = \boxed{-0,5 - \sqrt{5}}$$

$$x_1 = \frac{12 + 6\sqrt{7}}{2 \times (-6)} = \frac{12}{-12} + \frac{6\sqrt{7}}{-12} \qquad x_1 = \boxed{-1 - \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$x_2 = \frac{12 - 6\sqrt{7}}{2 \times (-6)} = \frac{12}{-12} + \frac{-6\sqrt{7}}{-12} \qquad x_2 = \boxed{-1 + \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

On regarde le signe de a pour conclure :

$\boxed{a = 4}$ **est positif donc**

Positif en dehors des racines x_2 et x_1

$$S = \left]-\infty\,;-0,5 - \sqrt{5}\right[\ \cup \ \left]-0,5 + \sqrt{5}\,;+\infty\right[$$

$\boxed{a = -6}$ **est négatif donc**

Positif entre les racines x_1 et x_2

$$S = \left[-1 - \frac{\sqrt{7}}{2}\,;-1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$$