Première – Spécialité Mathématiques

Chap. 1 : Trinômes du second degré

5 Situations qui se ramènent à une (in-) équation du 2^{nd} degré :

(*) À la découverte des systèmes d'équations somme/produit :

Définition :

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues (x et y) de la forme : $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$

Essayons de faire disparaître l'inconnue y de la seconde équation :

$$\iff \begin{cases} y = s - x \\ x \times (s - x) = p \end{cases} \iff \begin{cases} y = s - x \\ 0 = x^2 - s\,x + p \end{cases}$$

Or nous savons résoudre cette dernière équation (2^{nd} degré et à une seule inconnue).

Démontrer les formules donnant la somme et le produit des racines :

Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Dans ce cas, pour tout x,

$$\begin{aligned} & a\,x^2 + b\,x + c = a \times (x - x_1)(x - x_2) \\ \iff\; & a\,x^2 + b\,x + c = a \times [\,x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2\,] \\ \iff\; & a\,x^2 + b\,x + c = a\,x^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + a\,x_1\,x_2 \\ \iff\; & b = -a\,(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = a\,x_1\,x_2 \\ \iff\; & s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad p = x_1\,x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » sur la somme et le produit des racines :

(*) Les systèmes d'équations somme/produit :

Cette notion est un approfondissement du programme.

$\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases} \iff$ x et y sont solutions de : $x^2 - s\,x + p = 0$

Les formules donnant s et p en fonction de a, b et c :

Soient x_1 et x_2 deux solutions de : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Alors : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

La méthode de résolution des équations du 2^{nd} degré quand : $a = 1$

x_1 et x_2 sont solutions de : $x^2 + b\,x + c = 0$ $\iff$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \times x_2 = c \end{cases}$

(*) Savoir - faire : Résoudre les systèmes d'équations somme/produit.

Démontrer qu'il n'existe pas 2 nombres dont la somme vaut 17 et le produit 75.	Déterminer L et l d'un rectangle dont l'aire vaut 210 cm^2 et le périmètre 58 cm.

Correction :

$x^2 - 17x + 75 = 0$	$x^2 - 29x + 210 = 0$
$\Delta = 17^2 - 4 \times 75 = -11$	$\Delta = 29^2 - 4 \times 210 = 1$
Pas de solution.	Deux solutions 14 et 15.

Savoir - faire : Méthode de résolution du 2^{nd} degré quand : $a = 1$

Résoudre les équations suivantes sans utiliser la méthode du discriminant Δ :

$x^2 - 7x + 12 = 0$	$x^2 - 2x - 24 = 0$

Correction :

Dans les deux cas, nous cherchons deux nombres dont :

La somme fait 7 et le produit fait 12.	La somme fait 2 et le produit fait -24.
$12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$	$24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$
Avec 3 et 4, la somme fait 7.	Avec -4 et 6, la somme fait 2.

(*) Pour aller encore plus loin :

Résoudre les quatre systèmes d'équations suivants d'inconnues x et y :

(1) $\begin{cases} x - y = 9 \\ x\,y = 90 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x^2 + y^2 = 117 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} x + y = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$; (4) $\begin{cases} x\,y = -3 \\ 4\,(x^2 + y^2) = 25 \end{cases}$

Indications :

(1) En posant $y' = -y$, on se retrouve avec un système somme/produit en x et y'.

(2) L'égalité $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2\,x\,y$ me permet d'obtenir la valeur du produit $x\,y$.

(3) Mettre au même dénominateur pour obtenir la valeur du produit $x\,y$.

(4) L'égalité $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2\,x\,y$ me permet d'obtenir la valeur de $x + y$.

Exercice sur une inéquation contenant des fractions.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x+1}{x-1} > -\frac{4}{5x-2}$$

On commence par évacuer les valeurs interdites :

Cette inéquation a un sens si :

$\boxed{x-1 \neq 0}$ **et** $\boxed{5x-2 \neq 0}$ **c'est à dire si :** $\boxed{x \neq 1}$ **et** $\boxed{x \neq 0{,}4}$

Obtenir une seule fraction comparée à 0 :

Pour $x \notin \{0{,}4\,;\,1\}$,

$$\begin{aligned}
& & \frac{x+1}{x-1} & \geqslant -\frac{4}{5x-2} \\
& \Longleftrightarrow & \frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{5x-2} & \geqslant 0 \\
& \Longleftrightarrow & \frac{(x+1)(5x-2) + 4(x-1)}{(x-1)(5x-2)} & \geqslant 0 \\
& \Longleftrightarrow & \frac{5x^2 + 7x - 6}{(x-1)(5x-2)} & \geqslant 0
\end{aligned}$$

Déterminer les éventuelles racines du numérateur :

Pour $5x^2 + 7x - 6$, **nous obtenons :** $\Delta = 7^2 - 4\,(5)\,(-6) = 49 + 120 = \boxed{13^2}$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-7+13}{2\times 5} = \boxed{0{,}6}$ **et** $x_2 = \dfrac{-7-13}{2\times 5} = \boxed{-2}$

Conclure à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2		$0{,}4$		$0{,}6$		1	$+\infty$
$5x^2+7x-6$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$5x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
Fraction	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left]0{,}4\,;\,0{,}6\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[}$$

Exercice sur une équation contenant un paramètre.

On considère l'équation suivante d'inconnue x et de paramètre m :

$$\boxed{(m-2)\,x^2 + 2\,m\,x - 1 = 0}$$

Résoudre l'équation pour : $m = 2$

Pour $m = 2$, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned}
& & 0 \times x^2 + 4x - 1 & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & 4x & = 1 & & \textit{Équation du } 1^{er} \textit{ degré en } x. \\
& \Longleftrightarrow & x & = \boxed{0{,}25}
\end{aligned}$$

Pour quelle valeur de $m \neq 2$, l'équation admet-elle qu'une seule solution ?

Pour $m \neq 2$, l'équation en x admet une seule solution si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& & \Delta & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (2\,m)^2 - 4\,(m-2)\,(-1) & = 0 & & \textit{Équation du } 2^{nd} \textit{ degré en } m. \\
& \Longleftrightarrow & 4\,m^2 + 4\,m - 8 & = 0 & & \textbf{or } m = 1 \textbf{ est une racine évidente} \\
& \Longleftrightarrow & (m-1)\,(\,?\,m + \,?\,) & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (m-1)\,(4\,m + 8) & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \boxed{m = 1} \ \textbf{ou} \ \boxed{m = -2}
\end{aligned}$$

Quelle est alors, dans chaque des cas, la valeur de cette unique solution ?

Situation n°1 : $m = 1$

Nous obtenons l'équation du 2^{nd} degré en x suivante :

$$\begin{aligned}
& & -x^2 - 2\,x - 1 & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & x^2 + 2\,x + 1 & = 0 & & \textbf{on reconnaît une I.R.} \\
& \Longleftrightarrow & (x+1)^2 & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \boxed{x = -1}
\end{aligned}$$

Situation n°2 : $m = -2$

Nous obtenons l'équation du 2^{nd} degré en x suivante :

$$\begin{aligned}
& & -4\,x^2 - 4\,x - 1 & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & 4x^2 + 4\,x + 1 & = 0 & & \textbf{on reconnaît une I.R.} \\
& \Longleftrightarrow & (2x+1)^2 & = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \boxed{x = -0{,}5}
\end{aligned}$$

Exercice sur une équation contenant une racine carrée.

Résoudre l'équation suivante : $\boxed{3\,x + 8\sqrt{x} - 3 = 0}$

On commence par évacuer les valeurs interdites :

Cette équation a un sens si : $\boxed{x \geqslant 0}$ **pour que la racine carrée existe.**

On réalise un changement de variables :

Pour tout $x \geqslant 0$, nous allons poser : $\boxed{u = \sqrt{x}}$

$$3\,x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{3\,u^2 + 8\,u - 3 = 0} \quad \textbf{et} \quad u = \sqrt{x}$$

Nous nous retrouvons avec une équation du 2^{nd} degré d'inconnue u.

$$\Delta = 8^2 - 4\,(3)\,(-3) = 64 + 36 = \boxed{100}$$

L'équation en u admet donc deux solutions :

$$\boxed{u_1 = \frac{-8 + 10}{2 \times 3} = \frac{1}{3}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{u_2 = \frac{-8 - 10}{2 \times 3} = -3}$$

On retrouve les solutions en x :

Pour tout $x \geqslant 0$, $\quad 3\,x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1}{3} \quad \textbf{ou} \quad \sqrt{x} = -3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \textbf{ou} \quad \textbf{Impossible}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{9}}$$

Exercice sur une inéquation bicarrée (avec x^2 et x^4).

Résoudre l'inéquation bicarrée suivante :

$$\boxed{x^4 + 5\,x^2 - 36 \geqslant 0}$$

On réalise un changement de variables :

Pour tout réel x, posons : $\boxed{u = x^2}$

$$x^4 + 5\,x^2 - 36 \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{u^2 + 5\,u - 36 \geqslant 0} \quad \textbf{et} \quad u = x^2$$

Nous nous retrouvons avec une inéquation du 2^{nd} degré d'inconnue u.

$$\Delta = 5^2 - 4\,(1)\,(-36) = 25 + 144 = \boxed{13^2}$$

L'expression en u admet donc deux racines :

$$\boxed{u_1 = \frac{-5 + 13}{2 \times 1} = 4} \quad \textbf{et} \quad \boxed{u_2 = \frac{-5 - 13}{2 \times 1} = -9}$$

On trouve des solutions en u :

$$x^4 + 5\,x^2 - 36 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{1} \times u^2 + 5\,u - 36 \geqslant 0 \quad \textbf{et} \quad u = x^2$$

$a = 1$ donc positif en dehors des racines.

$$\Longleftrightarrow \quad \Big(\underbrace{u \leqslant -9}_{\textbf{Impossible}} \quad \textbf{ou} \quad u \geqslant 4\Big) \quad \textbf{et} \quad u = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad u \geqslant 4 \quad \textbf{et} \quad u = x^2$$

On en déduit les solutions en x :

$$x^4 + 5\,x^2 - 36 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \geqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{1} \times x^2 - 4 \geqslant 0$$

$a = 1$ donc positif en dehors des racines : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[2\,;+\infty\right[}$

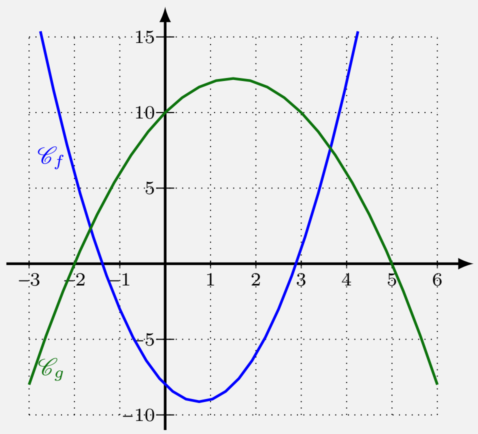
Exercice sur la position relative entre deux paraboles.

On considère deux fonctions f et g, représentées respectivement par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 - 3x - 8$
- $g(x) = -x^2 + 3x + 10$

1) Avec la précision permise par le graphique, déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que leur position relative.

2) Retrouver, par le calcul, les résultats de la question 1). *On exprimera les coordonnées sous la forme : $a + b\sqrt{7}$.*



Qu'est-ce que la position relative de deux courbes ?

- Nous voulons savoir qui des deux fonctions f et g est la plus grande.
- C'est - à - dire qui des deux verticalités $f(x)$ et $g(x)$ est la plus grande.

Par le graphique	Par le calcul
On veut les x pour lesquels :	On veut les x pour lesquels :
$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$	$f(x) \geqslant g(x)$
La verticalité $f(x)$ est ici la grande.	$\iff \boxed{f(x) - g(x)} \geqslant 0$

Correction de la question 1) :

- Les courbes admettent 2 points d'intersection : $\big(-1{,}7\,;\,2\big)$ et $\big(3{,}6\,;\,7{,}5\big)$
- La courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ quand $x \in \big[-1{,}7\,;\,3{,}6\big]$.

Correction de la question 2) :

Étudions le signe de l'expression : $h(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x) - g(x) \\
&= \left(2x^2 - 3x - 8\right) - \left(-x^2 + 3x + 10\right) \\
&= 2x^2 - 3x - 8 + x^2 - 3x - 10 \\
&= 3x^2 - 6x - 18 \\
h(x) &= \boxed{3\left(x^2 - 2x - 6\right)}
\end{aligned}$$

⚠ Parenthèses pour les expressions remplaçantes

Calculons le discriminant Δ ainsi que les deux racines :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2^2 - 4(1)(-6) \\
&= 28 \\
\Delta &= \boxed{\left(2\sqrt{7}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{7}}{2 \times 1} = \boxed{1 - \sqrt{7}} \qquad x_1 \approx -1{,}65$$

$$x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2 \times 1} = \boxed{1 + \sqrt{7}} \qquad x_2 \approx 3{,}65$$

Étudions le signe de a pour conclure :

$\boxed{a = 3}$ donc $h(x)$ est négatif entre des racines x_1 et x_2.

La courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ quand $x \in \big[1 - \sqrt{7}\,;\,1 + \sqrt{7}\big]$.

Coordonnées des points d'intersection :

Pour $x = x_1$, calculons $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= 2\left(1 - \sqrt{7}\right)^2 - 3\left(1 - \sqrt{7}\right) - 8 \\
&= 2\left(1 - 2\sqrt{7} + 7\right) - 3 + 3\sqrt{7} - 8 \\
f(x_1) &= \boxed{5 - \sqrt{7}} \approx 2{,}35
\end{aligned}$$

Pour $x = x_2$, calculons $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= 2\left(1 + \sqrt{7}\right)^2 - 3\left(1 + \sqrt{7}\right) - 8 \\
&= 2\left(1 + 2\sqrt{7} + 7\right) - 3 - 3\sqrt{7} - 8 \\
f(x_2) &= \boxed{5 + \sqrt{7}} \approx 7{,}65
\end{aligned}$$

Le « Ce Qu'il Faut Retenir » de ces exercices :

(In-) équations contenant des fractions :

1) Mettre de côté les valeurs interdites quand un dénominateur s'annule.
2) Transformer l'(in-) équation pour obtenir : $\dfrac{P}{Q} \geqslant 0$ (ou $=$, $\leqslant$, $<$, ...)
3) Factoriser P et Q pour faire une étude de signes.

Il est interdit de multiplier/diviser à gauche et à droite par une expression en x car nous sommes possiblement entrain de diviser par 0.

(In-) équations contenant des racines carrées :

On fait le changement de variable : $\boxed{u = \sqrt{x}}$

On ne garde que les u positifs et dans ce cas, on a : $\boxed{x = u^2}$

(In-) équations bicarrées contenant du x^2 et du x^4 :

On fait le changement de variable : $\boxed{u = x^2}$

On ne garde que les u positifs et dans ce cas, on a : $\boxed{x = \sqrt{u}}$ ou $\boxed{x = -\sqrt{u}}$

Position relative entre deux courbes :

On fait l'étude de signes de : $\boxed{h(x) = f(x) - g(x)}$

(*) Savoir - faire : Résoudre une (in-) équation du 3^{nd} degré.

Résoudre l'équation du 3^{nd} degré suivante :

$$\boxed{15\,x^3 - 34\,x^2 - 47\,x + 42 = 0}$$

Indication : **On pourra commencer par vérifier que 3 est solution.**

Vérifions que 3 est solution.

$$\begin{aligned} & 15 \times 3^3 - 34 \times 3^2 - 47 \times 3 + 42 \\ = \; & 15 \times 27 - 34 \times 9 - 141 + 42 \\ = \; & 405 - 306 - 99 \\ = \; & \boxed{0} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc factoriser par : $\left(x - 3\right)$

Factorisons l'expression.

Il existe alors des réels a, b et c tels que :

$$15\,x^3 - 34\,x^2 - 47\,x + 42 = \left(x - 3\right)\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)$$

Polynômes égaux donc coefficients égaux :

- **Coefficients en x^3 :** $15 = 1 \times a$ **donc** $\boxed{a = 15}$
- **Coefficients constants :** $42 = -3 \times c$ **donc** $\boxed{c = -14}$
- **Coefficients en x :** $-47 = -3 \times b + 1 \times (-14)$ **donc** $\boxed{b = 11}$
- **Vérification avec les coefficients en x^2 :** $11 - 3 \times 15 = 11 - 45 = -34$ **OK**

Conclusion :

$$\begin{aligned} & 15\,x^3 - 34\,x^2 - 47\,x + 42 = 0 \\ \Longleftrightarrow \; & \left(x - 3\right)\left(15\,x^2 + 11\,x - 14\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \; & \boxed{x = 3} \quad \textbf{ou} \quad 15\,x^2 + 11\,x - 14 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons l'équation du 2^{nd} degré :

Pas de racine évidente, donc je sors le discriminant Δ :

$$\Delta = 11^2 - 4\,(15)\,(-14) = 121 + 840 = 961 = \boxed{31^2}$$

Nous avons donc deux solutions supplémentaires :

$$\boxed{x_1 = \frac{-11 + 31}{2 \times 15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}} \quad \textbf{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-11 - 31}{2 \times 15} = -\frac{21}{15} = -\frac{7}{5}}$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7}{5} \,;\, \frac{2}{3} \,;\, 3 \right\}$

Vidéos :)