Première – Spécialité Mathématiques

Chap. 1 : Trinômes du second degré

6 Exercices de synthèse.

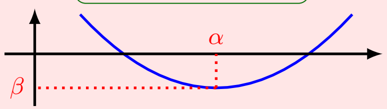
Le « Ce Qu'il Faut Retenir » pour les exercices de synthèse :

Pour avoir des informations sur un maximum et/ou un minimum :

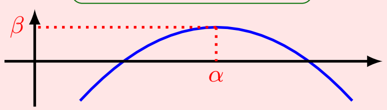
Écrire la grandeur étudiée sous la forme : $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Puis appliquer son cours : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Si a est positif



Si a est négatif



Pour résoudre une équation ou une inéquation :

Écrire l' (in-) équation sous la forme :

$$P(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0$$ ou avec $\geqslant$, $>$, $\leqslant$ ou $<$

1) Factorisation possible ? — Facteur commun ou I.R.
2) Racine évidente x_1 ? — On factorise alors par $(x - x_1)$.
3) Somme et produit des racines ? — si $a = 1$
4) Sinon, nous utilisons la « classique » méthode du discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \quad ; \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
P	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
P	Signe de a	

Exercice de synthèse sur Recette, Coût et Bénéfice :

Une entreprise vend des bouteilles d'huile d'olive artisanale. Le coût de fabrication de x milliers de bouteilles, en milliers d'euros, est modélisé par :

$$C(x) = 0,5\,x^2 + 0,6\,x + 8,16 \qquad \text{avec} \quad x \geqslant 0$$

Chaque bouteille est vendue 8 € l'unité.

Question 1 sur l'expression du bénéfice :

Justifier que le bénéfice de l'entreprise est donnée par :

$$B(x) = -\,0,5\,x^2 + 7,4\,x - 8,16 \qquad \text{avec} \quad x \geqslant 0$$

Indications :

Quelques formules d'économie :
- Recette = Prix unitaire × Nbr. d'unités.
- Bénéfice = Recette − Coût.

Correction :

$$B(x) = R(x) - C(x) = (8 \times x) - (0,5x^2 + 0,6x + 8,16) = -\,0,5\,x^2 + 7,4\,x - 8,16$$

Question 2 sur l'étude de cette expression :

Déterminer le nombre de bouteilles qu'il faut vendre afin que :

a. Le bénéfice soit maximal ; **b.** soit nul ; **c.** soit bénéficiaire.

Correction du point a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{7,4}{2 \times (-\,0,5)} = 7,4$$; Le bénéfice sera maximal pour $7\,400$ bouteilles.

Correction du point b :

Nous pouvons sortir directement la méthode du discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 7,4^2 - 4\,(-\,0,5)\,(-\,8,16) = 38,44 > 0$$

$$x_1 = \frac{-\,7,4 - 6,2}{2 \times (-\,0,5)} = 13,6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-\,7,4 + 6,2}{2 \times (-\,0,5)} = 1,2$$

Le bénéfice sera nul si l'entreprise vend $1\,200$ ou $13\,600$ bouteilles.

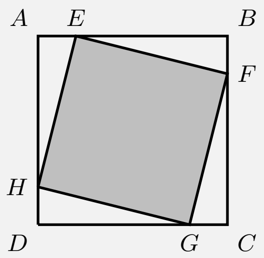
Correction du point c :

Ici $a = -0,5$ est négatif donc le bénéfice est positif (bénéficiaire) quand nous sommes entre les deux racines donc entre $1\,200$ et $13\,600$ bouteilles.

Exercice de synthèse sur l'aire d'une figure géométrique :

Soit $ABCD$ un carré de côté 5 cm. E, F, G et H sont des points appartenant aux côtés du carré tels que :

$$AE = BF = CG = DH = x \text{ cm}$$



1) Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2) Justifier que : $\mathcal{A}_{EFGH} = 2x^2 - 10x + 25$.

3) Quelle est l'aire minimale du quadrilatère $EFGH$?

4) Pour quelles valeurs de x, cette aire est - elle inférieure ou égale à 13 cm^2 ?

Indication pour la question 2) :

$$\mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} - 4 \times \mathcal{A}_{EBF}$$

Correction des questions 1) et 2) :

1) Comme $AB = 5$ cm, alors x est une valeur comprise entre 0 et 5.

2) $\mathcal{A}_{EFGH} = \mathcal{A}_{ABCD} - 4 \times \mathcal{A}_{EBF} = 25 - 4 \times \dfrac{x\,(5 - x)}{2} = \boxed{2\,x^2 - 10\,x + 25}$

Correction de la question 3) :

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-10}{2 \times 2} = \boxed{2,5}$; $\beta = 2 \times 2,5^2 - 10 \times 2,5 + 25 = \boxed{12,5}$ **(aire min.)**

Correction de la question 4) :

Méthode du discriminant Δ avec : $\mathcal{A}_{EFGH} \leqslant 13 \iff \boxed{2x^2 - 10x + 12 \leqslant 0}$

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 10^2 - 4\,(2)\,(12) = \boxed{4} > 0$$

$$x_1 = \frac{+10 - 2}{2 \times 2} = \boxed{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{+10 + 2}{2 \times 2} = \boxed{3}$$

Ici $a = 2$ positif donc nous sommes bien négatif entre les deux racines 2 et 3.

L'aire de $EFGH$ sera inférieure ou égale à 13 cm^2 quand $x \in [\,2\,;\,3\,]$.

ab