Première Spécialité Maths – CQFR

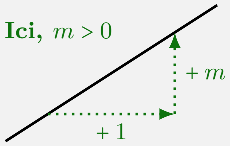
Chap. 1 : Trinômes du second degré

0 Pré - requis.

Le 1er degré :

$f(x) = m\,x + p$

représentée par une **droite oblique.**



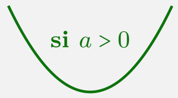
x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	Signe de $-\,m$	0	Signe de m

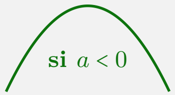
Mémo : On commence par le signe de $-\,m$.

Le 2nd degré (développée) :

$f(x) = a\,x^2 + bx + c$

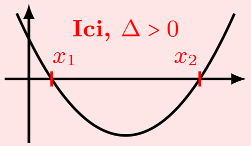
représentée par **une parabole.**





1 Forme factorisée : Courbe et tableau de signes.

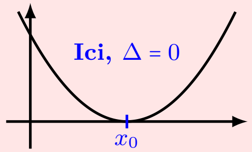
Deux racines x_1 et x_2



x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f	Signe de a	0	Signe de $-\,a$	0	Signe de a

$f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$

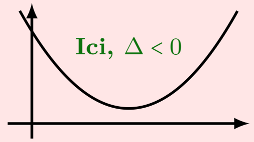
Une racine x_0



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f	Signe de a	0	Signe de a

$f(x) = a\,(x - x_0)^2$

Aucune racine.



x	$-\infty$	$+\infty$
f	Signe de a	

Pas de forme factorisée

Mémo : Le signe de $-\,a$ est à mettre entre les deux racines x_1 et x_2.

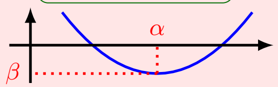
2 Forme canonique : Variations et extremum.

$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$

- Le carré s'annule en $x = \alpha$.
- On ajoute verticalement β.

f admet un extremum égale à β atteint en $x = \alpha$.

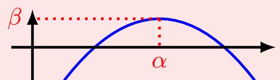
Si a est positif



x		α	
f	↘	β	↗

β est ici un minimum.

Si a est négatif



x		α	
f	↗	β	↘

β est ici un maximum.

- Démontrer que β est un extremum.
- Déterminer, par le calcul, l'expression de α en fonction de a, b et c.
- Démontrer que la droite d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie.
- Démontrer un sens de variations.

La parabole admet **un axe de symétrie** vertical d'équation $x = \alpha$. $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

3 Comment passer d'une forme à une autre ?

$a\,x^2 + b\,x + c \implies a\left[\,(x - \alpha)^2 + \beta'\,\right] \implies a\,(x - x_1)(x - x_2)$

3. a) De « développée » à « canonique » :

- **Étape 1 :** on factorise par a.

$f(x) = 2x^2 + 12x - 32 = 2\,x^2 + 2 \times 6x - 2 \times 16 = 2\,(x^2 + 6x - 16)$

- **Étape 2 :** on applique la formule : $x^2 + 2\,d\,x = (x + d)^2 - d^2$

$f(x) = 2\,(x^2 + 2\times 3 \times x - 16) = 2\left[\,(x+3)^2 - 3^2 - 16\,\right] = 2\left[\,(x+3)^2 - 25\,\right]$

3. b) De « canonique » à « factorisée » :

- **Si on peut, on applique l'identité remarquable :** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$f(x) = 2\left[\,(x+3)^2 - 5^2\,\right] = 2\,(x + 3 - 5)(x + 3 + 5) = 2\,(x - 2)(x + 8)$

- **Sinon il n'y a pas de forme factorisée** comme dans $f(x) = 2\left[\,(x + 3)^2 + 25\,\right]$

4 Méthode généralisée : Le discriminant.

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$; **Si $\Delta > 0$,** $x_{1,2} = \dfrac{-\,b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; **Si $\Delta = 0$,** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

Exemple : $f(x) = 2x^2 + 12x - 32$ $\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times (-32) = 400$

$x_1 = \dfrac{-\,12 - \sqrt{400}}{2 \times 2} = \dfrac{-\,12 - 20}{4} = -\,8$; $x_2 = \dfrac{-\,12 + 20}{4} = 2$

5 Somme S et produit P des racines x_1 et x_2.

On cherche deux réels x_1 et x_2 tels que leur somme est S et leur produit est P.

Or $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2 = x^2 - S\,x + P$

Exemple : $S = 40$ et $P = 375$ Nous devons étudier : $x^2 - 40x + 375$.

$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 \times 375 = 100$; $x_1 = \dfrac{+\,40 - \sqrt{100}}{2} = 15$; ; $x_2 = \dfrac{+\,40 + \sqrt{100}}{2} = 25$