Prem. Spé – Chap. 1 – Feuille d'exercices n°1

1 Forme factorisée : Courbe et tableau de signes.

Exercice 1.

Déterminer toutes les fonctions polynômes de degré 2 s'annulant en -5 et 4.

Exercice 2.

Déterminer la fonction polynôme de degré 2 s'annulant en $x = 3$ et $x = -2$ et telle que l'image de 0 soit -12.

Exercice 3. Tableau de signes :

- $h(x) = 3(x+7)(x-2)$
- $i(x) = -8(x+1)(x+9)$
- $j(x) = -\frac{7}{2}(5x+1)(x-2)$
- $k(x) = 6x(2-3x)$

Exercice 4. (Exercice résolu)

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$.
1. Donner une racine évidente de f.
2. Déterminer la seconde racine de f

1. $f(1) = 2 \times 1 - 10 \times 1 + 8 = 0$

   1 est donc racine évidente de f.

2. Ainsi $f(x) = (x-1)(mx+p)$

   Développons et par identification, obtenons : $\boxed{m = 2}$ et $\boxed{-p = 8}$

   Donc $f(x) = (x-1)(2x-8)$

   La seconde racine de f est : 4

Exercice 5.

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x - 6$.
1. Pourquoi $x_1 = 1$ est-elle une racine de f ?
2. Déterminer la seconde racine de f.

Exercice 6.

Déterminer une racine évidente de $f(x)$, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$ sans calculer le discriminant.

a. $f(x) = x^2 - x - 2$
b. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
c. $f(x) = 7x^2 - 14x + 7$

Exercice 7.

Soit f un polynôme du second degré de la forme $x^2 + bx + c$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$ deux racines de f. Déterminer les coefficients b et c.

2 Forme canonique : Variations, extremum et axe de symétrie.

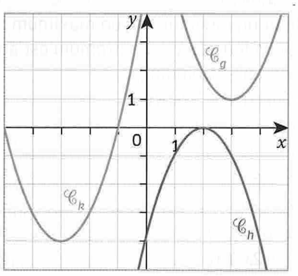
Exercice 8.

Déterminer pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ci-dessous :
- si elle admet un minimum ou un maximum ;
- pour quelle valeur de x il est atteint ;
- la valeur de cet extremum.

a. $x \mapsto -2(x-3)^2 + 4$
b. $x \mapsto 2(x-3)^2 - 4$
c. $x \mapsto -2(x+3)^2 + 4$
d. $x \mapsto 2(x-3)^2 + 4$
e. $x \mapsto -2(x+3)^2 - 4$
f. $x \mapsto -2x^2 + 4$
g. $x \mapsto 2(x-3)^2$

Exercice 9.

Les fonctions g, h et k sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et avec $a = 1$ ou $a = -1$.
En étudiant les courbes représentatives $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ de ces fonctions ci-dessous, donner les formes canoniques de $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$.



Exercice 10.

f, g, h sont des fonctions polynômes de degré 2 dont les tableaux de variations sont donnés ci-dessous :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↗	3	↘

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de g	↘	3	↗

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de h	↗	8	↘

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont les expressions possibles de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$?

a. $4(x-2)^2 + 3$
b. $-2(x-1)(x-5)$
c. $-(x-3)^2 + 2$
d. $-8(x-2)(x-4)$
e. $x^2 - 4x + 7$

Exercice 11.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3(x-2)(x+1)$.
1. La fonction g admet-elle un minimum ou un maximum ?
2. Déterminer les solutions réelles de l'équation $g(x) = 0$.
3. En déduire la valeur du réel x pour laquelle l'extremum de g est atteint.

Exercice 12.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}$.
1. Établir le tableau de variations de la fonction f.
2. En déduire le signe de $f(x)$.
3. Calculer $f(-1)$ et en déduire les solutions réelles de l'équation $f(x) = -2$.
4. À l'aide du tableau de variations de f, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant -2$.

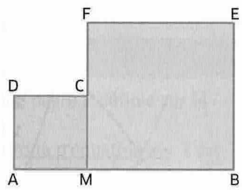
Exercice 13.

Un fermier souhaite fabriquer, pour ses poules, un enclos rectangulaire adossé à sa grange. Il dispose de 30 m de grillage.

1. Vérifier que l'expression $-2x^2 + 30x$ correspond à l'aire de l'enclos.
2. Quelle est l'aire maximale de l'enclos qu'il peut construire ?

Exercice 14.

Une enseigne lumineuse est fabriquée sur le modèle suivant : un point M étant placé sur un segment [AB] de 12 m de longueur, on construit les deux carrés de côtés respectifs [AM] et [MB].



On note x la longueur AM et $\mathscr{A}(x)$ l'aire de l'enseigne (c'est la somme des aires des deux carrés). La surface totale des deux carrés sera éclairée.
1. Déterminer l'expression de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer la position du point M sur le segment [AB] telle que la dépense pour l'éclairage soit minimale.

Exercice 15.

Déterminer la forme canonique de la fonction polynôme du second degré vérifiant : $f(2) = f(4) = 4$ et $f(3) = 5$.

3 Comment passer d'une forme à une autre ?

Exercice 16.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 5$.
1. Recopier et compléter l'égalité suivante : $x^2 + 6x + ... = (x + ...)^2$.
2. En déduire la forme canonique de $f(x)$.

Exercice 17.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.
1. Recopier et compléter les égalités suivantes :
   $f(x) = 2(x^2 - ...x) - 3$
   $f(x) = 2[(x - ...)^2 - ...] - 3$
2. En déduire la forme canonique de $f(x)$.

Exercice 18.

Déterminer les formes canoniques de chacun des polynômes de degré 2 suivants.
- $f(x) = x^2 - 4x - 3$
- $g(x) = 2x^2 - 8x - 1$
- $h(x) = 2x^2 + 3x + 1$
- $i(x) = x^2 - x$
- $k(x) = -3x^2 + 5x + 2$

Exercice 19.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)(x+4) + 3(x-5)$.
Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

Exercice 20.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 21.

Retrouver l'erreur de Mia lorsqu'elle a mis le polynôme f sous forme canonique :

$$f(x) = 2x^2 + 12x - 7 = 2(x^2 + 6x) - 7$$
$$= 2(x+3)^2 - 9 - 7 = 2(x+3)^2 - 16$$