Prem. Spé – Chap. 1 – Feuille d'exercices n°2

4 Méthodes pour résoudre une (in-) équation du 2^{nd} degré :

a) Si nous avons une racine évidente x_1 (1, − 1 ou 2), alors on factorise par $(x - x_1)$. (voir partie 1)

b) On pense à factoriser par un facteur commun ou par une identité remarquable :

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2x^2 - 10x = 0$ **b)** $x^2 - 36 = 0$
c) $x^2 + 2x + 1 = 0$ **d)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

a) $x^2 + 2x = 0$ **b)** $(x-1)^2 - 3 = -3$
c) $2(x-1)(x+5) = 0$ **d)** $2x^2 - 5x = 0$

Exercice 3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

a) $9x^2 - 6x + 4 = 0$ **b)** $(x+1)^2 - 7 = 0$
c) $x^2 = 3x$ **d)** $x^2 - 6x + 4 = 4$

c) Si $x^2 + b\,x + c = 0$ alors nous cherchons 2 nombres tels que : $\boxed{\text{somme} = -b}$ et $\boxed{\text{produit} = c}$.

Exercice 4. Résoudre :

1) $x^2 - 10\,x + 21 = 0$

2) $x^2 - 10\,x + 24 = 0$

Exercice 5. Résoudre :

1) $x^2 + 5x - 6 < 0$

2) $x^2 - 36 > 0$

Exercice 6.

Résoudre : $6x^2 - 12x - 18 \geqslant 0$

L'écrire : $x^2 + b\,x + c \geqslant 0$

d) Méthode du discriminant Δ : $\boxed{\Delta = b^2 - 4\,a\,c}$ et si $\Delta \geqslant 0$, alors : $\boxed{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}}$

- Si $\sqrt{\Delta}$ n'est pas un nombre à virgule fini, écrire $\sqrt{\Delta}$ sous la forme $b\sqrt{c}$. Par exemple : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
- Idem, si les racines x_1 et x_2 ne sont pas décimales, les écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$. Par ex : $3 - 2\sqrt{3}$

Exercice 7. Résoudre :

a. $-2x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$

b. $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $-2x^2 + 4x - 2 < 0$

Exercice 8. Résoudre :

a. $3x^2 - 2x - 3 = 0$

Solutions sous la forme : $a + b\sqrt{10}$

b. $-2x^2 + 4x + 1 = 0$

Solutions sous la forme : $a + b\sqrt{6}$

Exercice 9. Résoudre :

a. $x^2 - 4x - 23 > 0$

Solutions sous la forme : $a + b\sqrt{3}$

b. $-x^2 + 2x + 19 \geqslant 0$

Solutions sous la forme : $a + b\sqrt{5}$

e) Si nous avons des fractions, les mettre au même dénominateur (si ce n'est pas déjà fait).

Exercice 10. Résoudre :

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x - 2} < 0$$

Exercice 11. Résoudre :

$$2 \leqslant \frac{3x^2 + 1}{7 - x}$$

Exercice 12. Résoudre :

$$1 + \frac{2}{x} > \frac{1}{x - 5}$$

5 (*) Systèmes d'équations somme/produit :

Exercice 13. Trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit est 13.

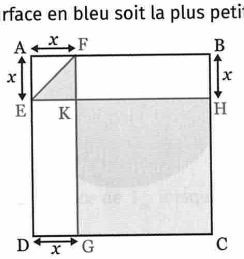
Exercice 14. Trouver deux nombres dont la somme est 24 et le produit est 58.

Exercice 15. Existe - t - il deux nombres dont la somme est 12 et le produit est 42 ?

6 Exercices de synthèse.

Exercice 16.

La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. ABCD est un carré de côté 4 cm. AFKE et KHCG sont des carrés. Le créateur de ce logo souhaite que l'aire de la surface en bleu soit la plus petite possible.



Pour quelle valeur de x, la partie bleue a-t-elle la plus petite aire ?

Exercice 17.

Changement de variable

Résoudre les équations suivantes :

a. $-3x^4 - 6x^2 + 45 = 0$ **b.** $-2x^2 + 16x - 30 = 0$
c. $-5x + 35\sqrt{x} - 60 = 0$ **d.** $3x - 15\sqrt{x} - 108 = 0$

Exercice 18.

Position relative d'une parabole et d'une droite

On veut étudier la position relative d'une parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et d'une droite d'équation $y = 5x - 3$.

1. Déterminer le ou les points d'intersection de la parabole et de la droite.

2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.

a) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

b) En déduire la position relative de la parabole et de la droite.

Exercice 19.

Le prix d'une pelle sur chenilles est de 100 000 €. S'il ne trouve pas d'acheteur, le vendeur songe à effectuer deux baisses successives de t % ($t \in [0\,;100]$) dans les 5 prochaines années afin que le prix soit inférieur à 70 000 €.

1. Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $10t^2 - 2\,000t + 30\,000 \leqslant 0$.

2. En déduire qu'il faut au moins deux baisses d'environ 16,33 %.

Exercice 20.

D'après Bac ES - Polynésie - 2014

On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $g(t) = \frac{4t}{t^2+1}$.

$g(t)$ représente la concentration en mg·L⁻¹ de l'antibiotique lorsque t heures se sont écoulées.

Répondre aux questions suivantes de façon algébrique puis vérifier à l'aide d'un graphique à la calculatrice.

1. Dans quel intervalle de temps la concentration sera-t-elle supérieure ou égale à 1,6 mg·L⁻¹ ?

2. La concentration peut-elle être strictement supérieure à 2 mg·L⁻¹ ?

Exercice 21.

On considère une fonction trinôme du second degré f telle que :

- $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$;
- la somme de ses racines est égale à -3.

Déterminer l'expression de $f(x)$.