$1^{\text{ère}}$ spé – DM n°1 – Pour le mercredi 07 octobre

Nom : .... ; **Prénom :** ....

Rendre le sujet avec la copie pour que je puisse y compléter le barème

1 Résolution d'équations et d'inéquations : (.................. / 7,5 points)

Prop : $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ admet une unique solution $\iff \Delta = b^2 - 4\,a\,c = 0$

Pour les quatre exercices ci-dessous, je vous demande de ne pas utiliser la méthode du Δ.

1) Si on détecte une racine évidente x_1 (1, 2 ou -1) alors on factorise par $(x - x_1)$.
2) Si $x^2 + b\,x + c = 0$, alors on veut 2 nombres où $\boxed{\text{somme} = -b}$ et $\boxed{\text{produit} = c}$
3) On peut essayer aussi de factoriser par un facteur commun ou par une I.R.

Exercice 1 (Équation avec un paramètre m). (.......... / $1+1=2$ pts)

On considère l'équation : $(m+8)\,x^2 + m\,x + 1 = 0.$

1) Pour quelles valeurs de m, cette équation admet-elle une unique solution ?
2) Pour chacune de ces valeurs de m, déterminer cette unique solution.

Exercice 2 (Équations bicarrées). (.......... / 2 pts)

1) On veut résoudre l'équation bicarrée : (E) : $4\,x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

a. Pour cela, on effectue un changement de variable : $\boxed{u = x^2}$ (........ / 1)

Résoudre l'équation associée d'inconnue u : $4\,u^2 - 5u - 9 = 0$

b. Pourquoi ne retient-on que les valeurs positives de u ?

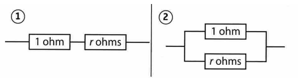
c. En déduire les solutions de (E). (........ / 1)

2) Résoudre par le même procédé l'équation bicarrée : $x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$

Exercice 3. L'objectif est de résoudre : $\dfrac{2\,t}{1-t} \geqslant \dfrac{t+2}{t}$ (........ / 2 pts)

1) Quelles sont les valeurs interdites de cette inéquation ? .... / 0,5
2) Pour résoudre cette inéquation, étudions le signe de $\dfrac{a\,t^2 + b\,t + c}{t\,(1-t)}$. .... / 1,5

Exercice 4. On a $R_{eq}(1) = R_1 + R_2$; $\dfrac{1}{R_{eq}(2)} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ (........ / 1,5 pts)



Déterminer la valeur de r pour que la résistance équivalente du circuit 1 soit égale à $4,5$ fois celle 2.

On pourra démontrer que : $\boxed{R_{eq}(2) = \dfrac{r}{1+r}}$ *et obtenir une équation* $\dfrac{a\,r^2 + b\,r + c}{1+r} = 0$

2 Trinôme du 2^{nd} degré à l'aide du graphique. (.................. / 6 pts)

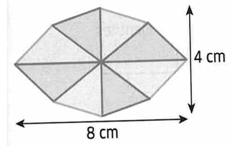
Exercice 5. Déterminer le trinôme sous la forme la plus adaptée. (........ / 3 pts)

1) $\mathscr{P}$ a pour sommet $S(3\,;1)$ et passe par le point $A(1\,;9)$.
2) $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et 6 et passe par $B(7\,;-4)$.
3) $\mathscr{P}$ passe par les points $C(0\,;1)$, $D(-1\,;3)$ et $E(1\,;5)$.

Pour les exercices 6 et 8, il faudra utiliser la méthode du discriminant Δ.

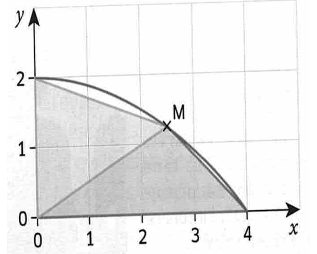
1) *On écrira $\sqrt{\Delta}$ sous la forme $b\sqrt{c}$ avec c le plus petit possible.* **Ex :** $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
2) *On écrira ainsi les solutions sous la forme : $a + b\sqrt{c}$ avec c le plus petit possible.*

Exercice 6. (........ / 3 points)



Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un tee-shirt. Les aires de chaque triangles sont égales, et les sommets des triangles distincts du centre du logo sont des points appartenant aux deux arcs de paraboles.

On a représenté un quart de ce logo :



1) Montrer que l'arc de la parabole représenté a pour équation : $y = 2 - 0,125\,x^2$ .... / 1
2) Où placer le point $M(x\,;y)$ pour que les aires des triangles coloriés soient égales ? .... / 2

On essayera d'obtenir l'équation : $0 = x^2 + 4x - 16$

On écrira x et y sous la forme : $a + b\sqrt{5}$

3 Calculs de longueurs dans un repère orthonormé. (............. / 6,5 pts)

Propriété. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans un repère orthonormé.

Alors : $AB^2 =$ .... / 0,5 point

Exercice 7. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;1)$ et $M(x;y)$.

1) Exprimer AM^2 en fonction de x et y. (.............. / $0,5+0,5+1+1,5 = 3,5$ pts)

Nous souhaitons que M soit équidistant de A et de l'axe des abscisses.

2) Vérifier, par le schéma, que $M(1\,;5)$ respecte cette condition.

- *Pour les questions ci-dessous, justifier votre réponse en résolvant une équation.*

3) Trouver la (ou les) valeur(s) de y telle(s) que $M(0\,;y)$ respecte cette condition.
4) Trouver la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que $M(x;2,5)$ respecte cette condition.

Exercice 8. On se place dans le repère orthonormé $(O;I,J)$ où $OI = 1$ cm.

On note R le rayon des trois cercles.

1) Exprimer les coordonnées de E et F en fonction de R.
2) Expliquer pourquoi : $EF^2 = 4R^2$.
3) À l'aide des questions 1) et 2), démontrer que : $R^2 - 12 \times R + 8 = 0$
4) En déduire R sous la forme $a + b\sqrt{7}$ et arrondie à $0,001$ cm près.

.... / $0,75+1+0,75 = 2,5$ pts