$1^{ère}$ spé – Chap. 2 – Feuille d'exercices n°2

2 Suites arithmétiques et géométriques.

2. a) Utilisation des formules de récurrence :

Exercice 1. Soit (U_n) arithmétique de raison 4 et de premier terme $U_0 = 2$.
1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
2) En déduire U_1, U_2 et U_3.

Exercice 2. Soit (U_n) arithmétique de raison $1,5$ avec $U_4 = 9$. Retrouver U_0.

Exercice 3. Soit (U_n) arithmétique telle que $U_2 = 4$ et $U_6 = -1$. Déterminer la valeur de la raison de la suite.

Exercice 4. Soit (U_n) géométrique de raison -2 et de premier terme $U_0 = 0,5$.
1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
2) En déduire U_1, U_2 et U_3.

Exercice 5. Soit (U_n) géométrique de raison 2 avec $U_3 = 12$. Retrouver U_0.

Exercice 6. Soit (U_n) géométrique telle que $U_0 = -3$ et $U_1 = 4$. Déterminer la valeur de la raison de la suite.

Exercice 7. Une ville comptait $10\,000$ habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 10 % par rapport à l'année précédente. On note U_n le nombre d'habitants en $2018 + n$.
1) Justifier que la suite (U_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
2) En déduire les valeurs de U_0, de U_1 et de U_2.

2. b) Utilisation des formules explicites :

Exercice 8. Soit (U_n) arithmétique de raison 2 et de premier terme $U_0 = -3$.
1) Exprimer U_n en fonction de n.
2) En déduire la valeur de U_{20}.

Exercice 9. Soit (U_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $U_0 = -1$.
1) Exprimer U_n en fonction de n.
2) En déduire la valeur de U_{10}.

Exercice 10. Pour ses 10 ans, les parents de Marie lui achètent un petit coffre-fort et y mettent 100 € dedans. Puis tous les ans pour son anniversaire, ils lui donnent 50 € à placer dans son coffre-fort.
On note U_n la somme dans le coffre-fort n années après ses 10 ans. On a : $U_0 = 100$.
1) Exprimer U_n en fonction de n.
2) Combien Marie a-t-elle dans son coffre-fort à son 15^e anniversaire ?
3) Déterminer à quel âge Marie aura-t-elle $1\,000$ € dans son coffre-fort.

Exercice 11. Carolle et Nicolas font un tournoi de 5 mini-jeux sur un jeu vidéo. Carole obtient un score de $5\,000$ et Nicolas un score de $3\,500$. Nicolas décide alors de s'entrainer chaque semaine pour battre le record de Carole. Chaque semaine, il améliore son score de 5 %. Au bout de combien de semaines battra-t-il le record de Carole ?

2. c) Savoir rentrer une suite dans la calculatrice :

Exercice 12. Soit (U_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $U_n = 3 \times 2^n$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier entier n tel que :
a) $U_n > 1\,000$ b) $U_n > 10\,000$ c) $U_n > 100\,000$

Exercice 13. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 3 \times U_n - 5 \quad \text{pour tt } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier entier n tel que :
a) $U_n < -500$ b) $U_n < -5\,000$

Exercice 14. Le 1^{er} janvier 2019, Olivier veut déposer $5\,000$ € sur un compte en banque. Il a le choix entre deux propositions.

1. On lui propose un compte épargne où chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait 110 €. On note U_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier $2019 + n$.
   a) Déterminer la valeur de U_0 et de U_1.
   b) Exprimer U_n en fonction de n en justifiant.
   c) Combien aurait-il sur son compte en banque en 2040 ?
2. On lui propose un compte épargne avec des intérêts à taux composés. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verserait 2 % de la somme disponible sur le compte. On note V_n la somme sur le compte le 1^{er} janvier $2019 + n$.
   a) Déterminer la valeur de V_0 et de V_1.
   b) Exprimer V_n en fonction de n en justifiant.
   c) Combien aurait-il sur son compte en banque en 2040 ? Arrondir à $0,01$ €.
3. En rentrant les suites sur la calculatrice, déterminer à partir de combien d'années il est plus intéressant de choisir l'offre avec des intérêts à taux composés ?

2. d) Savoir démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique :

Exercice 15. Un parc d'attractions propose à ses visiteurs des pass annuels donnant un accès illimité à l'ensemble du site. En 2019, $5\,000$ visiteurs achètent ce pass. Chaque année, le directeur du parc prévoit que 90 % de ces visiteurs renouvelleront leur pass et que 800 nouveaux visiteurs en achèteront un.
On note U_n le nombre de visiteurs ayant le pass annuel en $2019 + n$.
1) Déterminer la valeur de U_0 et de U_1.
2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 800$
3) Soit (V_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $V_n = U_n - 8\,000$
   a. Justifier que la suite (V_n) est géométrique.
   b. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de V_n en fonction de n.
   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de U_n en fonction de n.
4) Combien peut-on prévoir qu'il y aura de visiteurs détenteurs du pass annuel en 2030 ?