$1^{ère}$ spé – Chap. 2 – Feuille d'exercices n°3

3 Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

3. a) Formules du cours (en français) :

- Arithmétique : Somme = ...
- Géométrique : Somme = ...

Pour éviter l'erreur classique de ne pas savoir compter le nombre de termes :

- Du terme U_2 au terme U_{10}, il y a .... transitions et .... termes (inclus).
- Du terme U_0 au terme U_n, il y a .... transitions et .... termes (inclus).
- Du terme U_1 au terme U_n, il y a .... transitions et .... termes (inclus).

Il y a donc toujours .... terme de .... que de transitions.

3. b) Applications directes du cours :

Exercice 1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$ et telle que $u_0 = 5$. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -1/2$ et telle que $u_5 = 8$. Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 3. À l'aide d'une suite arith,

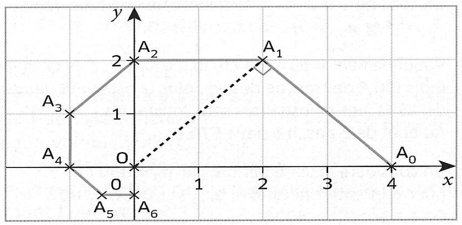
- Calculer $S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$
- La somme des n premiers impairs.

Exercice 4. Soit S_n la somme des n premiers termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 11. Déterminer la valeur n telle que $S_n = 1\ 581$.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et telle que $u_0 = 3$. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et telle que $u_5 = 5$. Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 7. Exprimer, en fct. de c, la diagonale d'un carré de côté c.



Longueur de la spirale $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{20}$?

3. c) Le montant total d'une assurance :

Exercice 8. Afin s'assurer son appartement, un couple comparer deux propositions :

A) 200 € la 1^{er} année puis + 10 € par an. B) 100 € la 1^{er} année puis + 12 % par an.

1) On pose a_n l'assurance A) pour la n - ième année ainsi $a_1 = 200$.
   a. Exprimer a_n en fonction de n.
   b. Exprimer le montant total S_n de l'assurance A) pour les n premières années.
   c. En déduire a_{10} et S_{10}.
2) On pose b_n l'assurance B) pour la n - ième année ainsi $b_1 = 100$.
   a. Exprimer b_n en fonction de n.
   b. Exprimer le montant total T_n de l'assurance B) pour les n premières années.
   c. En déduire b_{10} et T_{10}.
3) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle il est préférable d'avoir souscrit à l'assurance B).

3. d) Les annuités constantes.

Exercice 9 (Déterminer le nombre de mensualité). Pour acheter un appartement, un couple a emprunté un capital de 250 000 € auprès d'une banque à taux fixe annuel de $1,5$ % (hors assurances). Il souhaite que le montant mensuel du remboursement du crédit (appelé « montant de la mensualité ») s'élève 1 600 €.

On va considérer que le taux mensuel est de $\dfrac{1,5\ \%}{12} = 0,125\ \%$.

1) Par combien faut - il multiplier pour réaliser une hausse de $0,125$ % ?

Mensualité	Capital restant dû (avant la mensualité)	Montant des intérêts	Montant de la mensualité	Capital réellement remboursé	Capital restant dû (après la mensualité)
n	C_{n-1}	I_n	1 600	R_n	C_n

2) Vérifier que : $I_1 = 312,50$; $R_1 = 1\,287,50$ et $C_1 = 248\,712,50$
3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer C_n en fonction de C_{n-1}.
4) On pose pour tout entier n : $u_n = C_n - 1\ 280\ 000$
   a. Démontrer que pour tout entier n, $u_{n+1} = 1,00125\ u_n$.
   b. En déduire, pour tout entier n, u_n en fonction de n.
   c. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
5) Déterminer alors le nombre de mensualité pour que l'emprunt soit remboursé.

3. e) Vérification de la somme des k^2 et la somme des k^3.

Exercice 10. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2$

1) Définir la suite (S_n) par récurrence (terme initial + formule de récurrence).
2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $U_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Démontrer que (U_n) vérifie la définition par récurrence de (S_n).
3) Conclure.

Exercice 11. Même exercice avec : Calculer S_1, U_1, S_2, U_2, S_3, U_3

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 \quad ; \quad U_n = \left(\sum_{k=1}^{k=n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 12. Dans les deux exercices précédents, nous avons vérifier que les deux formules étaient vraies. Comment aurions - nous pu faire pour les trouver ?