Suites : Démontrer qu'une suite est arithmétique.

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{n\,U_n + 4}{n+1} \end{cases}$ pour tout entier $n > 0$

On considère une suite auxiliaire (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\boxed{V_n = n\,U_n}$

1) Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique.

Qu'est - ce qu'une suite arithmétique ?

En français :

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre que l'on note r (la raison).

En mathématique :

Il existe un réel r tel que :

Pour tout n, $\boxed{V_{n+1} = V_n + r}$

Comment démontrer que (V_n) est arithmétique ?

Il suffit de démontrer notre égalité : soient r un réel et $n > 0$ un entier.

On calcule V_{n+1} | On calcule $V_n + r$

On cherche la valeur de r pour avoir la même chose à gauche et à droite.

Correction de la question 1)

Soient r un réel et $n > 0$ un entier.

$$V_{n+1} = (n+1) \times U_{n+1}$$
$$= \cancel{(n+1)} \times \frac{n\,U_n + 4}{\cancel{n+1}}$$
$$V_{n+1} = \boxed{n\,U_n + 4}$$

$$V_n + r = \boxed{n\,U_n + r}$$

Avec $r = 4$, nous obtenons que pour tout $n > 0$ entier, $\boxed{V_{n+1} = V_n + r}$

2) Calculer la valeur de V_1 et exprimer V_n en fonction de n.

3) En déduire U_n en fonction de n.

Correction des questions 2) et 3)

- $V_1 = 1 \times U_1 = 1 \times 0 = \boxed{0}$

(V_n) est arithmétique donc pour $n > 0$,

$$V_n = V_1 + (n-1) \times r$$
$$= 0 + (n-1) \times 4$$
$$V_n = \boxed{4(n-1)}$$

Pour tout entier $n > 0$,

$$\boxed{V_n = n \times U_n}$$

Donc $U_n = \dfrac{V_n}{n}$

Conclusion : $U_n = \boxed{\dfrac{4(n-1)}{n}}$