Les suites arithmétiques : Formule de la somme.

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r

Alors, quelque soit l'entier $n \geqslant 0$,

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$$

Comment démontrer une égalité ?

Pour démontrer une égalité comme : $a = b$ **Une méthode est de :**

- **Calculer, en parallèle, les expressions de a et de b.**
- **Espèrer à la fin obtenir la même chose.**

Résultats précédents :

- **La somme des n premiers entiers :** **Pour $n \geqslant 1$**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **L'expression du terme général U_n d'une suite arithmétique :** **Pour $n \geqslant 0$**

$$U_n = U_0 + n \times r$$

Démonstration :

$$\begin{array}{rcllll}
 & U_0 & = & U_0 & & \\
+ & U_1 & = & U_0 & + \ 1 & \times r \\
+ & U_2 & = & U_0 & + \ 2 & \times r \\
+ & U_3 & = & U_0 & + \ 3 & \times r \\
+ & \dots & = & \dots & + \ \dots & \times r \\
+ & U_n & = & U_0 & + \ n & \times r \\
\hline
= & S_n & = & (n+1) \times U_0 & + \ \dfrac{n(n+1)}{2} & \times r
\end{array}$$

$$= (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$$

$$= (n+1) \times \frac{U_0 + U_0 + n \times r}{2}$$

$$= (n+1) \times \frac{2\,U_0 + n \times r}{2}$$

$$= (n+1) \times \left(\frac{\cancel{2}\,U_0}{\cancel{2}} + \frac{n \times r}{2} \right)$$

$$= (n+1) \times U_0 + (n+1) \times \frac{n \times r}{2}$$