

Les suites :

Calculons $1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

Commençons par poser correctement notre problème :

Soient q un nombre réel non nul et n un entier positif. 0^0 n'a pas de sens.

Rappelons que :

$$q^2 = q \times q$$

;

$$q = q^1$$

;

$$1 = q^0$$

Nous souhaitons donc calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Pour cela, nous allons utiliser le concept de la somme télescopique :

Nous allons simplement additionner deux sommes de telle sorte que **beaucoup de termes vont se simplifier deux par deux** (on dira qu'ils se télescopent).

$$\begin{array}{rcl} 1 \times S_n & = & 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ + \quad -q \times S_n & = & -q - q^2 - \dots - q^{n-1} - q^n - q^{n+1} \\ \hline = (1 - q) S_n & = & 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 - q^{n+1} \end{array}$$

Ainsi

$$(1 - q) S_n = 1 - q^{n+1}$$

Pour isoler notre S_n , nous devons diviser à gauche et à droite par $(1 - q)$.

Premier cas : $q \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Deuxième cas : $q = 1$

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1) \text{ fois}} = n + 1$$