

Les suites géométriques :

Formule de la somme.

Rappel d'un résultat précédent :

La somme des premières puissances

Pour tout entier $n \geq 0$,
avec $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Calculons la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soient (U_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n un entier positif.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

Or pour tout entier $k \geq 0$,

$$U_k = U_0 \times q^k$$

$$= U_0 \times 1 + U_0 \times q + U_0 \times q^2 + \dots + U_0 \times q^n = \sum_{k=0}^n U_0 \times q^k$$

$$= U_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = U_0 \times \left(\sum_{k=0}^n q^k \right)$$

$$S_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Conclusion :

$$\text{Somme} = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nbr. de termes})}}{1 - q}$$

Que se passe-t-il si la somme commence à $k = p$?

Soient n et p deux entiers positifs tels que : $p \leq n$.

$$\sum_{k=p}^n U_k = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Pour tout entier $k \geq p$, on a :

$$U_k = U_p \times q^{k-p}$$

$$\sum_{k=p}^n U_k = \sum_{k=p}^n U_p \times q^{k-p} = U_p \times \left(\sum_{k=p}^n q^{k-p} \right)$$

Comment allons-nous faire pour que notre somme commence à $k = 0$?

En réalisant ce qu'on appelle un changement d'indice :

$$k' = k - p$$

$$\sum_{k=p}^n U_k = U_p \times \left(\sum_{k'=0}^{n-p} q^{k'} \right) = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{CQFD}$$