Dérivation : Savoir calculer un nombre dérivé (3).

Pour tous nombres réels a et b, démontrer l'égalité suivante :

$$\boxed{\left(a + b\right)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3}$$

Démontrer alors que la fonction f ainsi définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en $x = 10$:

$$\boxed{f(x) = x^3}$$

Calculer le nombre dérivé de f en 10.

Propriété à utiliser :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L tel que :

$$\boxed{\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\,(a+h) - f(a)}{h} = L}$$

Le réel L ainsi obtenu, noté $f'(a)$, est appelé le nombre dérivé de f en a.

Correction :

Pour tout réel $h \neq 0$,

- **Après plusieurs lignes de calculs :** $f(10+h) - f(10) = h^3 + 30\,h^2 + 300\,h$
- **Ainsi** $\dfrac{f(10+h) - f(10)}{h} = h^2 + 30\,h + 300$
- **Donc, par passage à la limite, quand $h \to 0$, nous obtenons :**

$$\boxed{f'(10) = 300}$$

Comme 300 est un réel, nous venons également de démontrer que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 10}$$