

Suites arithmétiques – Déterminer U_n en fonction de n .

Le terme U_n représente la population d'une ville pour l'année $2019 + n$.
En 2022, la population était de 20 400 habitants et elle augmente de 360 par an.
Pour tout entier naturel n , exprimer U_n en fonction de n .

1 On analyse l'énoncé.

1. a) Nature de la suite ?

« augmente de 360 habitants par an » :

Notre suite (U_n) est donc de nature arithmétique de raison $r = 360$

1. b) Terme initial ?

Le terme U_n de rang n représente l'année $2019 + n$.

Donc l'année 2022 sera représentée par le terme U_3 de rang 3 avec $U_3 = 20\,400$.

2 On ajoute un certain nombre de fois la raison r .

Pour aller de U_3 à U_n , il y a $(n - 3)$ transitions = « la fin » - « le début »

Nous allons donc ajouter $(n - 3)$ fois la raison r :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad U_n = U_3 \overset{\text{arithmétique}}{+} \underbrace{(n - 3)}_{\text{nombre de transitions}} \times \overset{\text{raison } r}{360}$$

Nous venons simplement d'utiliser la formule généralisée suivante,

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbb{N}, \quad U_n = U_p + (n - p) \times r$$

en substituant p par 3 et r par 360.

3 On termine en développant l'expression obtenue.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad U_n &= U_3 + (n - 3) \times 360 \\ &= 20\,400 + 360n - 1\,080 \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 360n + 19\,320$$