Dérivée et variations d'une fonction du 3^e degré :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\,-7\,;\,8\,\right]$ par :

$$\boxed{f(x) \;=\; 2\,x^3 - 3\,x^2 - 72\,x - 5}$$

L'objectif est de compléter le tableau suivant :

x	-7		$\cdots$		$\cdots$		8
Signe de $f'(x)$		$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	
Variations de f	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Pour cela :

1) Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ puis compléter les lignes 1 et 2 du tableau.

3) En déduire les variations de la fonction f puis compléter la ligne 3 du tableau.

1 Théorème que nous allons utiliser ici.

- **Si la dérivée f' est positive alors la fonction f est croissante.**
- **Si la dérivée f' est négative alors la fonction f est décroissante.**

2 On dérive f pour obtenir l'expression de $f'(x)$.

Pour tout réel $x \in \left[\,-7\,;\,8\,\right]$,

$$f(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 72\,x - 5$$

On applique la technique de dérivation d'un polynôme :

$$f'(x) = 2\,(x^3)' - 3\,(x^2)' - 72\,(x)' - (5)'$$

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 72 \times 1 - 0$$

$$f'(x) = \boxed{6\,x^2 - 6x - 72}$$

3 On étudie le signe de $f'(x)$, fonction du 2^e degré.

Rappel sur le signe d'une fonction du 2^{nd} degré :

x		$??$		$??$	
Signe de $a\,x^2 + b\,x + c$	**Signe de a**	0	**Signe de $-a$**	0	**Signe de a**

- **Les $??$ sont les valeurs de x telles que :** $\quad a\,x^2 + b\,x + c = 0$
- **Elles peuvent être obtenues, par exemple, avec la méthode du discriminant Δ.**

Nous avons supposé dans ce rappel que $\Delta > 0$ et donc qu'il y avait deux racines $??$ distinctes.

Utilisons ce rappel :

x	-7		$??$		$??$		8
Signe de $f'(x) = 6\,x^2 - 6\,x - 72$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminons les valeurs des $??$ à l'aide du discriminant Δ :

- $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = (-6)^2 - 4\,(6)\,(-72) = 36 + 1728 = \boxed{1\,764}$
- $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \dfrac{+6 - \sqrt{1\,764}}{2 \times 6} = \dfrac{-36}{12} = \boxed{-3}$
- $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \dfrac{+6 + \sqrt{1\,764}}{2 \times 6} = \dfrac{48}{12} = \boxed{4}$

4 On applique le théorème.

x	-7		-3		4		8
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	e	$\nearrow$	f	$\searrow$	g	$\nearrow$	h

Déterminons alors les valeurs de e, f, g et h :

La valeur e est obtenue à partir de l'expression $f(x)$ en substituant x par -7.

$$e = f(-7) = 2\,(-7)^3 - 3\,(-7)^2 - 72\,(-7) - 5 = \boxed{-334}$$

$$f = f(-3) = 2\,(-3)^3 - 3\,(-3)^2 - 72\,(-3) - 5 = \boxed{130}$$

$$g = f(4) = 2\,(4)^3 - 3\,(4)^2 - 72\,(4) - 5 = \boxed{-213}$$

$$h = f(8) = 2\,(8)^3 - 3\,(8)^2 - 72\,(8) - 5 = \boxed{30}$$

Ces valeurs peuvent aussi être obtenues à l'aide de la table des valeurs de la fonction f.